



28 mai 2025

Alix BARRAQUE - Chloé HENRY

Rapport de SAR



IMT Atlantique

Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Table des matières

1	Audio Signal Processing	3
1.1	Synthèse additive	3
1.1.1	Question 1.1	3
1.1.2	Question 1.2	4
1.1.3	Question 1.3	5
1.1.4	Question 1.4	6
1.1.5	Question 1.5	6
1.2	Synthèse soustractive	7
1.2.1	Question 2.1	7
1.2.2	Question 2.2	9
1.3	Effet audio-numériques	9
1.3.1	Question 3.1	9
1.3.2	Question 3.2	9
1.3.3	Question 3.3	9
1.3.4	Question 3.4	10
1.3.5	Question 3.5	10
1.3.6	Question 3.6	10
1.3.7	Question 3.7	11
1.3.8	Question 3.8	11
1.3.9	Question 3.9	11
1.3.10	Question 3.10	12
1.3.11	Question 3.11	12
1.3.12	Question 3.12	12
1.3.13	Question 3.13	13
1.3.14	Question 3.14	14
1.3.15	Question 3.14	14
1.3.16	Question 3.16	15
1.3.17	Question 3.17	15
1.3.18	Question 3.18	15
1.3.19	Question 3.19	16
2	Digital Synthetiser	16
3	Audio Filter Lab	16

1 Audio Signal Processing

1.1 Synthèse additive

1.1.1 Question 1.1

Visualisons le spectre d'amplitude obtenu avec une transformée de Fourier discrète de quelques instruments à cordes. Comparer-les avec d'autres instruments. L'amplitude du spectre sera représentée en décibels et pour les fréquences contenues entre $-f_e/2$ et $f_e/2$.

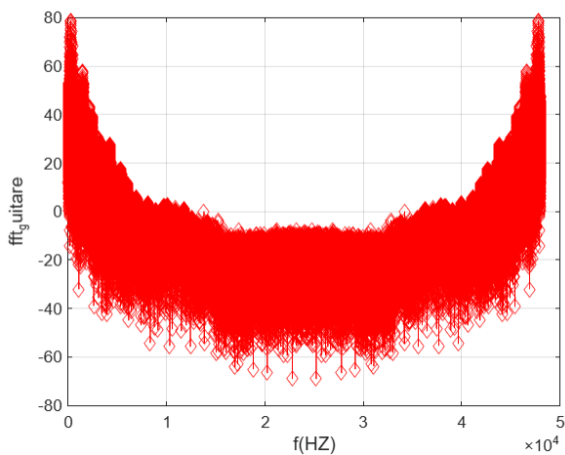


FIGURE 1 – Spectre d'amplitude obtenu par transformée de Fourier de la guitare. L'amplitude est en décibels.

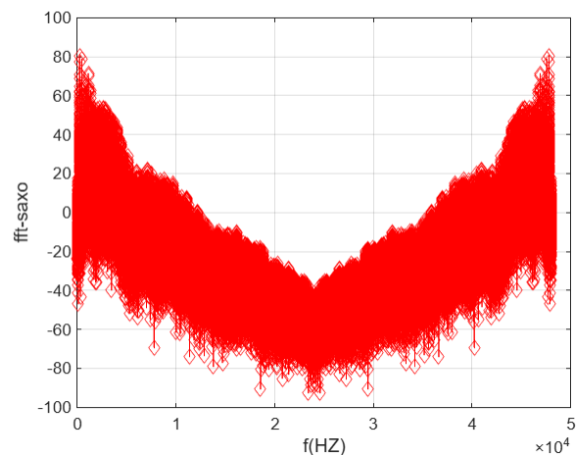


FIGURE 2 – Spectre d'amplitude obtenu par transformée de Fourier du saxophone. L'amplitude est en décibels.

Pour déterminer la fréquence du fondamental, nous allons tracer la transformée de Fourier discrète sans que l'amplitude soit en décibel. Voilà la courbe que l'on obtient pour la guitare a2.

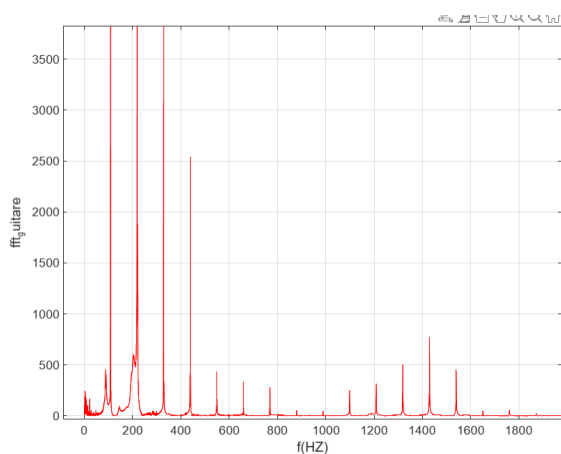


FIGURE 3 – Guitare

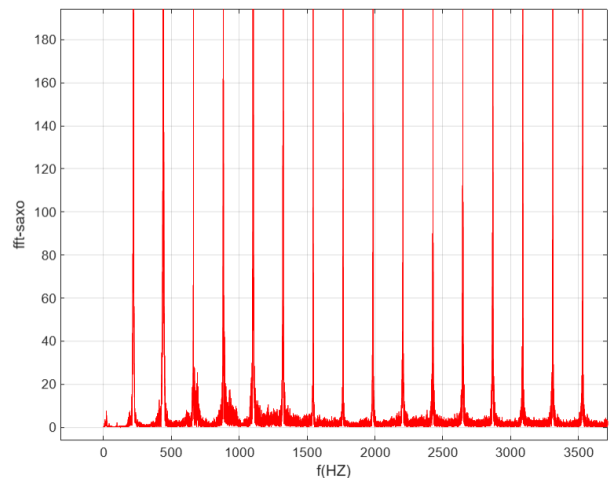


FIGURE 4 – Saxophone

On en déduit que la fréquence de coupure est $F_1 = 110$ Hz pour la guitare, et $F_1 = 220,7$ Hz pour le

saxophone.

1.1.2 Question 1.2

Visualisez sur une même figure, la représentation spectrale des sons de piano enregistrés dans les fichiers piano1.wav et piano2.wav.

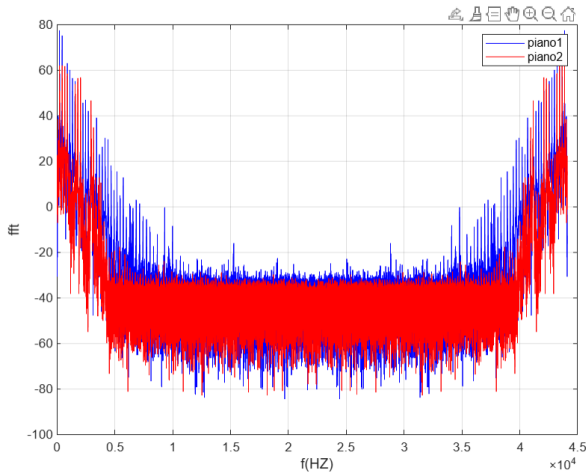


FIGURE 5 – Représentation spectrale des 2 sons de piano en décibels

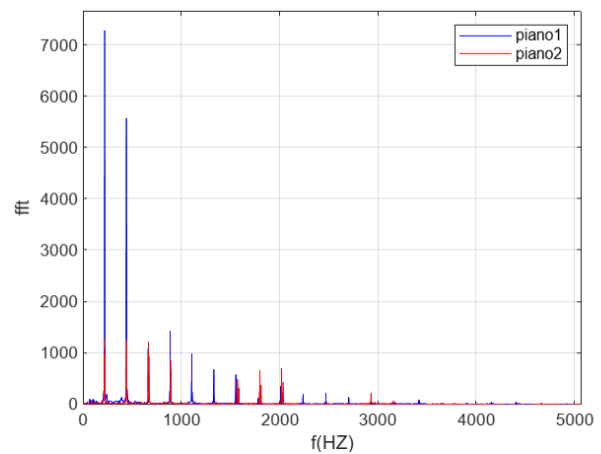


FIGURE 6 – Représentation spectrale des 2 sons de piano

Pour trouver lequel des deux sons est le plus harmonieux et lequel est le plus inharmonieux, nous allons calculer le degré d'inharmonicité pour les 7 premières fréquences. La formule utilisée pour la n-ième harmonique est la suivante : $\xi = 1200 * (\log_2(\hat{f}_n) - \log_2(nf_1))$.

TABLE 1 – Analyse du Piano 1 ($f_1 = 221$ Hz)

Fréquence	Théorique (Hz)	Mesurée (Hz)	Inharmonicité (%)
F_2	442	442	0
F_3	663	663	0
F_4	884	885	1.95
F_5	1105	1108	4.69
F_6	1326	1331	6.51
F_7	1547	1556	10.04

TABLE 2 – Analyse du Piano 2 ($f_1 = 218$ Hz)

Fréquence	Théorique (Hz)	Mesurée (Hz)	Inharmonicité (%)
F_2	436	442	23.67
F_3	654	667	34.08
F_4	872	892	39.26
F_5	1090	1118	43.91
F_6	1308	1347	50.86
F_7	1526	1572	51.42

On en déduit que le piano 2 est le plus inharmonieux.

1.1.3 Question 1.3

Pour le son le plus harmonique, nous avons récupéré les amplitudes des harmoniques (on se limite aux 8 premières : ce sont les suivantes :

Fréquence (Hz)	amplitudes des harmoniques
221	7287
442	5565
663	1088
885	1414
1108	980
1331	671
1556	528
1782	101

Nous avons généré un son en superposant les ondes sinusoïdales aux fréquences et amplitudes correspondantes sur Matlab.

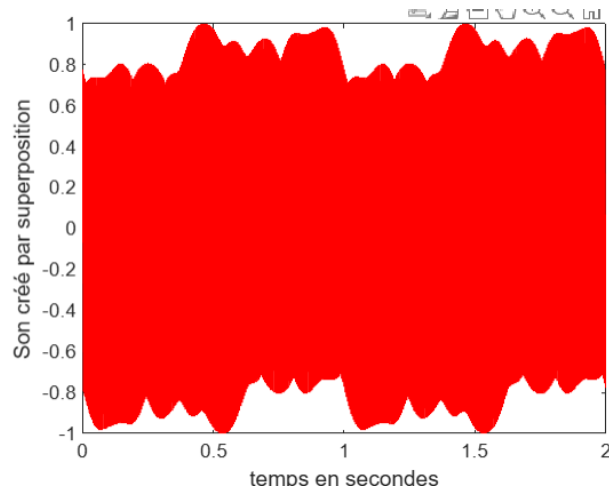


FIGURE 7 – Son obtenu en superposant les ondes sinusoïdales aux fréquences et amplitudes correspondantes

1.1.4 Question 1.4

Les sons générés par les instruments à cordes n'ont pas une enveloppe constante en fonction du temps. L'enveloppe couramment utilisée en synthèse sonore est l'enveloppe dite ADSR. Nous allons créer une enveloppe pour mieux approcher le son du piano.

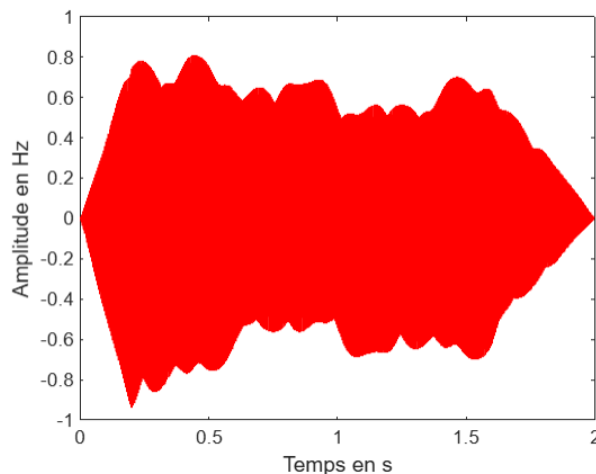


FIGURE 8 – Enveloppe ADSR

1.1.5 Question 1.5

En partant des mêmes amplitudes et harmoniques, nous allons faire une synthèse en passant cette fois par la transformée de Fourier discrète inverse. Voilà le résultat obtenu.

Nous n'obtenons pas le même résultat.

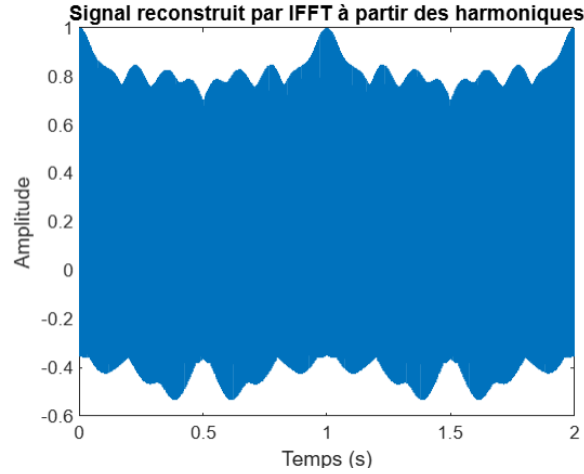


FIGURE 9 – Synthèse en passant par la transformée de Fourier discrète inverse

1.2 Synthèse soustractive

1.2.1 Question 2.1

Calcul du spectre d'un signal carré (non centré) :

Soit $y(t)$ le signal carré défini sur une période $[0, T]$ par :

$$y(t) = \begin{cases} A & \text{pour } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ -A & \text{pour } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

et $y(t + T) = y(t)$. La fréquence fondamentale est $f_0 = 1/T$.

Les coefficients de la série de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} A dt + \int_{T/2}^T -A dt \right) = \frac{1}{T} \left(A \frac{T}{2} - A \frac{T}{2} \right) = 0$$

Calcul de a_n pour $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \cos(2\pi n f_0 t) dt + \int_{T/2}^T -A \cos(2\pi n f_0 t) dt \right)$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0} \right]_0^{T/2} - \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0} \right]_{T/2}^T$$

$$a_n = \frac{A}{\pi n} (\sin(\pi n) - \sin(0)) - \frac{A}{\pi n} (\sin(2\pi n) - \sin(\pi n))$$

$$a_n = \frac{A}{\pi n} (0 - 0) - \frac{A}{\pi n} (0 - 0) = 0$$

Calcul de b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin(2\pi n f_0 t) dt + \int_{T/2}^T -A \sin(2\pi n f_0 t) dt \right) \\
 b_n &= \frac{2A}{T} \left[-\frac{\cos(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0} \right]_0^{T/2} - \frac{2A}{T} \left[-\frac{\cos(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0} \right]_{T/2}^T \\
 b_n &= -\frac{A}{\pi n} (\cos(\pi n) - \cos(0)) + \frac{A}{\pi n} (\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)) \\
 b_n &= -\frac{A}{\pi n} ((-1)^n - 1) + \frac{A}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \frac{A}{\pi n} (1 - (-1)^n) + \frac{A}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \frac{2A}{\pi n} (1 - (-1)^n)
 \end{aligned}$$

Donc, $b_n = 0$ pour n pair, et $b_n = \frac{4A}{\pi n}$ pour n impair.

Le spectre du signal est donc donné par les coefficients b_n . La série de Fourier s'écrit :

$$y(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Calcul du spectre d'un signal en dent de scie :

Considérons le signal en dent de scie $x(t)$ défini sur une période $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ par :

$$x(t) = \frac{2t}{T} \quad \text{pour} \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$$

avec une fréquence fondamentale $f_0 = 1/T$.

Les coefficients de la série de Fourier sont :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt
 \end{aligned}$$

On a :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2t}{T} dt = 0$$

Coefficients a_n pour $n \neq 0$ Puisque $x(t)$ est impair et $\cos(2\pi n f_0 t)$ est pair, leur produit est impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle :

$$a_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0$$

Coefficients b_n pour $n \neq 0$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2t}{T} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \frac{4}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Ainsi, la série de Fourier du signal en dent de scie est :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

La méthode de vérification numérique proposée est la suivante :

- Générer numériquement les signaux sur plusieurs périodes.
- Calculer la Transformée de Fourier de ces signaux.
- Analyser l'amplitude des coefficients de la transformée de Fourier pour identifier les harmoniques et leurs amplitudes, en les comparant aux résultats analytiques.

1.2.2 Question 2.2

La réponse impulsionnelle du filtre passe bas est la suivante :

$$h(k) = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{2}\delta(k-1)$$

où $\delta(k)$ est l'impulsion de Dirac discrète.

Pour obtenir la réponse fréquentielle du filtre, nous prenons la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de la réponse impulsionnelle $h(k)$:

$$H(\nu) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j2\pi\nu})$$

.

1.3 Effet audio-numériques

1.3.1 Question 3.1

Exprimons $R_{xy}(z)$:

$$R_{xy}(z) = y(\tau) * y^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(z) = x(\tau) * h(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(z) = h(\tau) * R_{xx}(z)$$

1.3.2 Question 3.2

On suppose que $R_{xx}(u) \simeq d(u)$. D'où, d'après la fonction précédente on en déduit que :

$$R_{xy}(\tau) \simeq h(\tau)$$

Ainsi on en déduit que la fonction d'intercorrélation entre x et y est une estimation directe de $h(k)$. Une méthode d'estimation de réponse impulsionnelle est donc de calculer la fonction d'autocorrélation entre x et y .

1.3.3 Question 3.3

En nous aidant de la fonction `xcorr` de Matlab, nous allons déterminer lequel des deux signaux semble le plus adapté comme signal d'excitation pour mesurer la réponse impulsionnelle de la pièce.

D'après la question précédente le signal le plus adapté comme signal d'excitation pour mesurer la réponse impulsionnelle de la pièce est celui qui a une fonction d'intercorrélation proche du dirac : $R_{xx}(u) \simeq d(u)$.

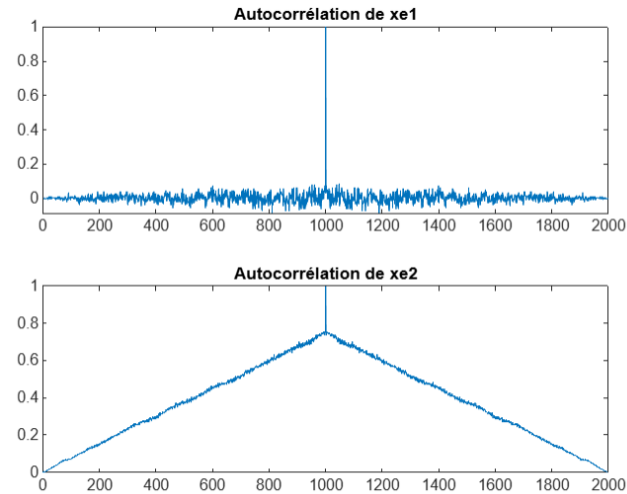


FIGURE 10 – Fonction d'intercorrelation des deux signaux

On remarque que la fonction d'intercorrelation de xe1 possède un unique pic : cela est proche d'une fonction dirac.

1.3.4 Question 3.4

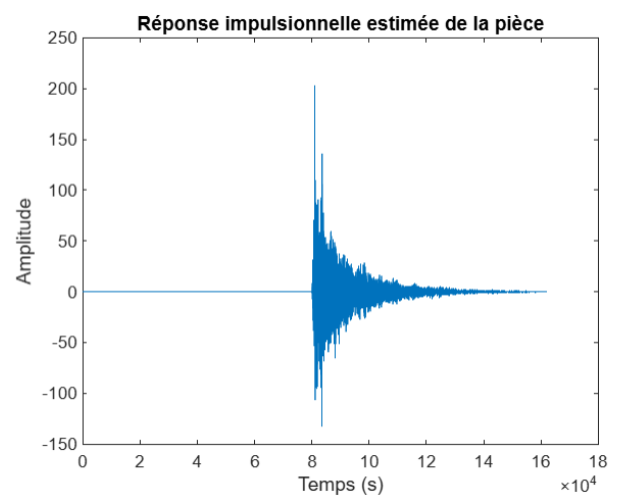


FIGURE 11 – Réponse impulsionnelle estimée en fonction du temps.

1.3.5 Question 3.5

cf Matlab

1.3.6 Question 3.6

Sur mon ordinateur portable, j'obtiens un temps d'exécution de effet reverb : 0.5083 secondes.

1.3.7 Question 3.7

Le temps execution, sur mon ordinateur portable, de effet reverb FFT : 0.0548 secondes pour le même signal d'entrée.

1.3.8 Question 3.8

La méthode utilisant la FFT (convolution dans le domaine fréquentiel) est mathématiquement équivalente à la convolution classique (dans le domaine temporel).

La méthode par FFT est beaucoup plus rapide, comme l'illustrent les temps d'exécution mesurés ci-dessus.

En conclusion, oui, la méthode utilisant la FFT est équivalente à la convolution classique du point de vue du résultat, mais elle est généralement plus efficace en termes de performance pour les longs signaux.

1.3.9 Question 3.9

On considère le système défini par l'équation en différences suivante :

$$y(k) = x(k) - g \cdot y(k - \tau)$$

En posant $h(k) = y(k)$, on obtient :

$$h(k) = \delta(k) - g \cdot h(k - \tau)$$

Comme h est causal, on a $h(k) = 0$ pour tout $k < 0$.

Cherchons la valeur de $h(0)$ en utilisant le fait que h soit causal :

$$h(0) = \delta(0) - gh(-\tau) = 1$$

Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned} h(0) &= \delta(0) - g \cdot h(-\tau) = 1 - g \cdot 0 = 1 \\ h(\tau) &= \delta(\tau) - g \cdot h(0) = 0 - g \cdot 1 = -g \\ h(2\tau) &= \delta(2\tau) - g \cdot h(\tau) = 0 - g \cdot (-g) = g^2 \\ h(3\tau) &= \delta(3\tau) - g \cdot h(2\tau) = 0 - g \cdot g^2 = -g^3 \\ &\vdots \\ h(n\tau) &= (-g)^n \end{aligned}$$

Pour $k \in]0, \tau[$, on a :

$$h(k) = -g \cdot h(k - \tau) = 0$$

D'où par récurrence, on a :

$$h(k) = 0 \quad \text{si } k \notin \{0, \tau, 2\tau, \dots\}$$

On obtient bien :

$$h(k) = \begin{cases} (-g)^n & \text{si } k = n\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.3.10 Question 3.10

Le filtre est stable si la condition suivante est vérifiée :

$$|g| < 1$$

1.3.11 Question 3.11

$$y(k) = x(k) - g \cdot y(k - \tau)$$

Ainsi, on a :

$$a_1 y(k) = b_1 x(k) - a_{\tau+1} \cdot y(k - \tau)$$

Par identification, on détermine les vecteurs a et b , tous deux de taille $\tau + 1$:

$$a = [1, 0, \dots, 0, 1]$$

$$b = [1, 0, \dots, 0]$$

1.3.12 Question 3.12

Voila la représentation temporelle de $h(k)$ que l'on a obtenue grâce à Matlab :

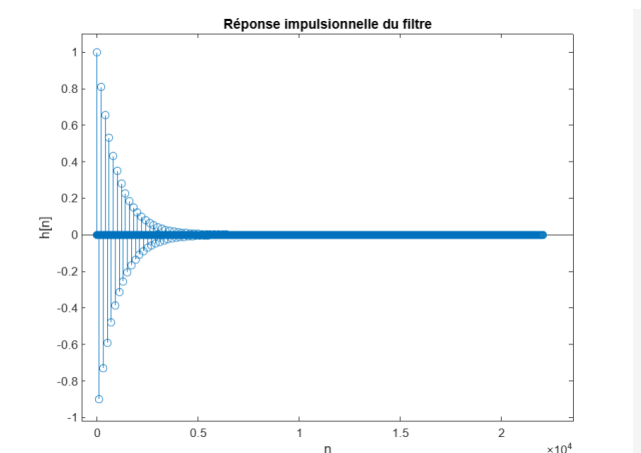


FIGURE 12 – Représentation de h pour $g=0.9$

1.3.13 Question 3.13

$$h(k) = \begin{cases} (-g)^n & \text{si } k = n\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier discrète $\hat{h}(\nu)$ s'obtient grâce à la formule suivante :

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-2j\pi\nu k}$$

Or $h(k)$ est non nul uniquement lorsque $k = n\tau$, donc on peut écrire :

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-g)^n e^{-2j\pi\nu n\tau}$$

$$\hat{h}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-ge^{-2j\pi\nu\tau})^n$$

C'est une série géométrique de raison $r = -ge^{-2j\pi\nu\tau}$ qui converge lorsque $|g| < 1$, ce qui est le cas ici.

Ainsi, on obtient :

$$\hat{h}(\nu) = \frac{1}{1 + ge^{-2j\pi\nu\tau}}$$

Calcul du module :

$$|\hat{h}(\nu)| = \left| \frac{1}{1 + ge^{-2j\pi\nu\tau}} \right| = \frac{1}{|1 + ge^{-2j\pi\nu\tau}|}$$

Or,

$$1 + ge^{-2j\pi\nu\tau} = 1 + g \cos(2\pi\nu\tau) - jg \sin(2\pi\nu\tau)$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\nu)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 + g \cos(2\pi\nu\tau))^2 + (g \sin(2\pi\nu\tau))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2g \cos(2\pi\nu\tau) + g^2 \cos^2(2\pi\nu\tau) + g^2 \sin^2(2\pi\nu\tau)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2g \cos(2\pi\nu\tau) + g^2(\cos^2(2\pi\nu\tau) + \sin^2(2\pi\nu\tau))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2g \cos(2\pi\nu\tau) + g^2}} \end{aligned}$$

Calcul de la phase :

$$\arg(\hat{h}(\nu)) = -\arg(1 + ge^{-2j\pi\nu\tau})$$

$$= -\arctan\left(\frac{-g \sin(2\pi\nu\tau)}{1 + g \cos(2\pi\nu\tau)}\right) = \arctan\left(\frac{g \sin(2\pi\nu\tau)}{1 + g \cos(2\pi\nu\tau)}\right)$$

Donc la phase de $\hat{h}(\nu)$ est :

$$\arg(\hat{h}(\nu)) = \arctan\left(\frac{g \sin(2\pi\nu\tau)}{1 + g \cos(2\pi\nu\tau)}\right)$$

1.3.14 Question 3.14

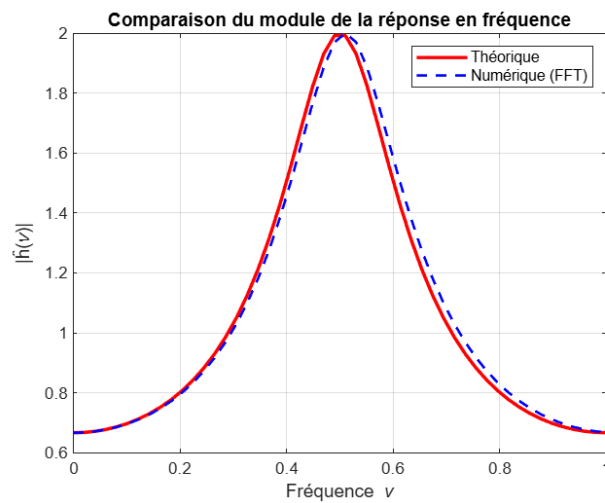


FIGURE 13 – Représentation graphique du module de la réponse en fréquence obtenu théoriquement et de celui obtenu numériquement à l'aide de la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle

1.3.15 Question 3.14

cf. Matlab

1.3.16 Question 3.16

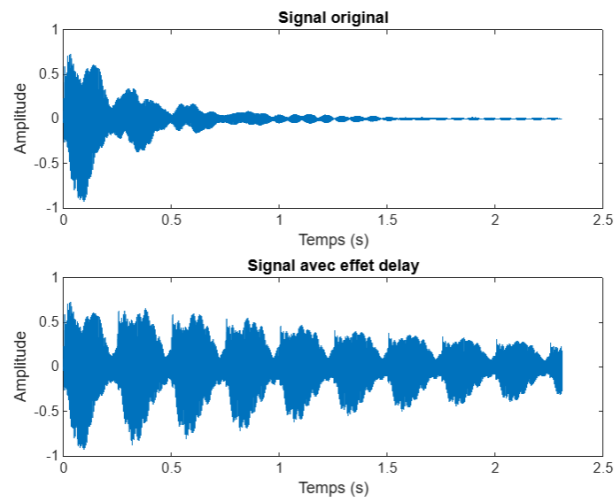


FIGURE 14 – Signal x et signal y modifié par le filtre Delay

1.3.17 Question 3.17

cf. Matlab

1.3.18 Question 3.18

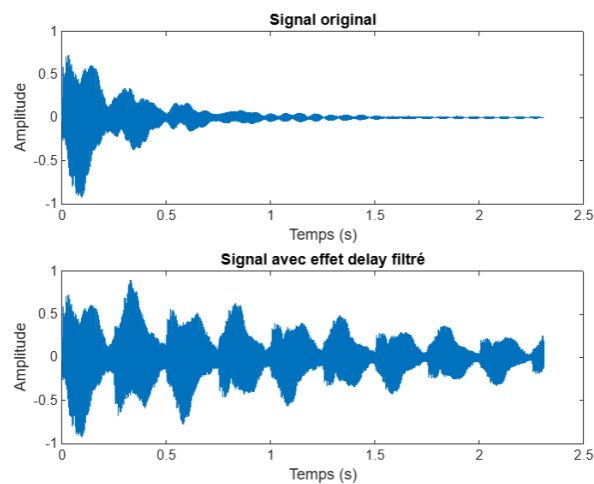


FIGURE 15 – Signal x et signal y modifié par le nouveau filtre Delay

1.3.19 Question 3.19

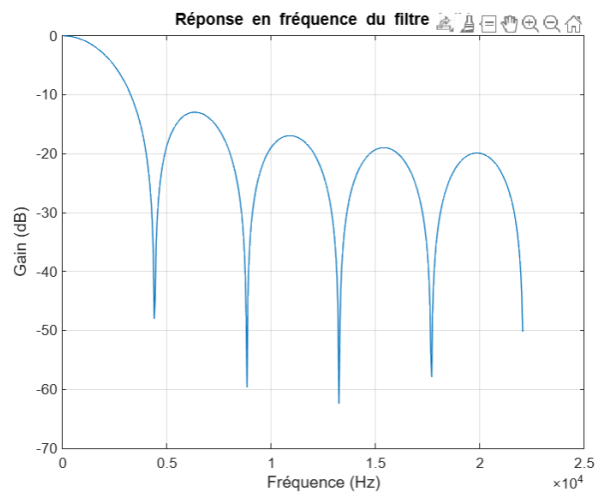


FIGURE 16 – Réponse en fréquence de l'effet de retard filtré

2 Digital Synthetiser

Voir compte-rendu sur GitLab

3 Audio Filter Lab

Voir compte-rendu sur GitLab