

IMT Atlantique

Technopôle de Brest-Iroise - CS 83818

29238 Brest Cedex 3

Téléphone : +33 (0)2 29 00 13 04

Télécopie : +33 (0)2 29 00 10 12

URL : www.imt-atlantique.fr

**UE Electrical Engineering**

SAR Traitements audio : partie signal

Loann Nicotte

Etienne Bertin

Date d'édition : 21 mai 2025

**IMT Atlantique**

Bretagne-Pays de la Loire

École Mines-Télécom

Sommaire

Introduction **2**

Présentation Théorique du Problème **2**

1. Synthèse additive **2**

 1.1. Analyse d’un son harmonique 2

 1.2. Synthèse 4

2. Synthèse soustractive **4**

3. Effets audio-numériques **6**

 3.1. Effets de réverbération 6

 3.1.1. Mesure de réponse impulsionnelle 6

 3.1.2. Convolution classique 8

 3.1.3. Convolution rapide 9

 3.2. Effet de retard 9

4. Conclusion **13**

Introduction

Ce projet vise à illustrer et appliquer les notions abordées dans le cours de traitement du signal. Il est structuré en quatre sections principales : la synthèse additive, la synthèse soustractive, les effets audio-numériques, et une exploration de la synthèse Karplus-Strong. L'objectif est de manipuler et comprendre les techniques de traitement du signal audio à travers des applications pratiques en utilisant l'environnement de développement Matlab. Ce projet permet également de se familiariser avec les outils et méthodes utilisés pour l'analyse et la synthèse des sons, ainsi que pour l'implémentation d'effets audio-numériques.

Présentation Théorique du Problème

La synthèse additive est une méthode de création de sons en superposant des ondes sinusoïdales de différentes fréquences et amplitudes. Cette technique repose sur le principe que tout son périodique peut être décomposé en une série de sinusoïdes, appelées harmoniques. L'analyse d'un son harmonique permet de déterminer les composantes fréquentielles et leurs amplitudes respectives. La synthèse additive consiste ensuite à reconstruire le son en additionnant ces sinusoïdes.

pas exactement. harmonique plus fort que sa : $f = n f_1$

La synthèse soustractive part d'un signal riche en harmoniques, tel qu'un signal carré ou en dent de scie, et utilise des filtres pour atténuer certaines fréquences. Cette méthode est couramment utilisée dans les synthétiseurs analogiques pour créer une variété de sons. Le principe de base est de générer un signal périodique et de le filtrer pour obtenir le son désiré.

Les effets audio-numériques modifient un signal audio numérisé pour des fins artistiques ou correctives. Parmi les effets étudiés, on trouve la réverbération et le retard. La réverbération simule la propagation du son dans un environnement clos, ajoutant de l'espace au son. Le retard, quant à lui, simule les réflexions des ondes acoustiques, créant des effets d'écho.

1. Synthèse additive

1.1. Analyse d'un son harmonique

Question 1.1

Code

Fichier en question : question_1_1.m

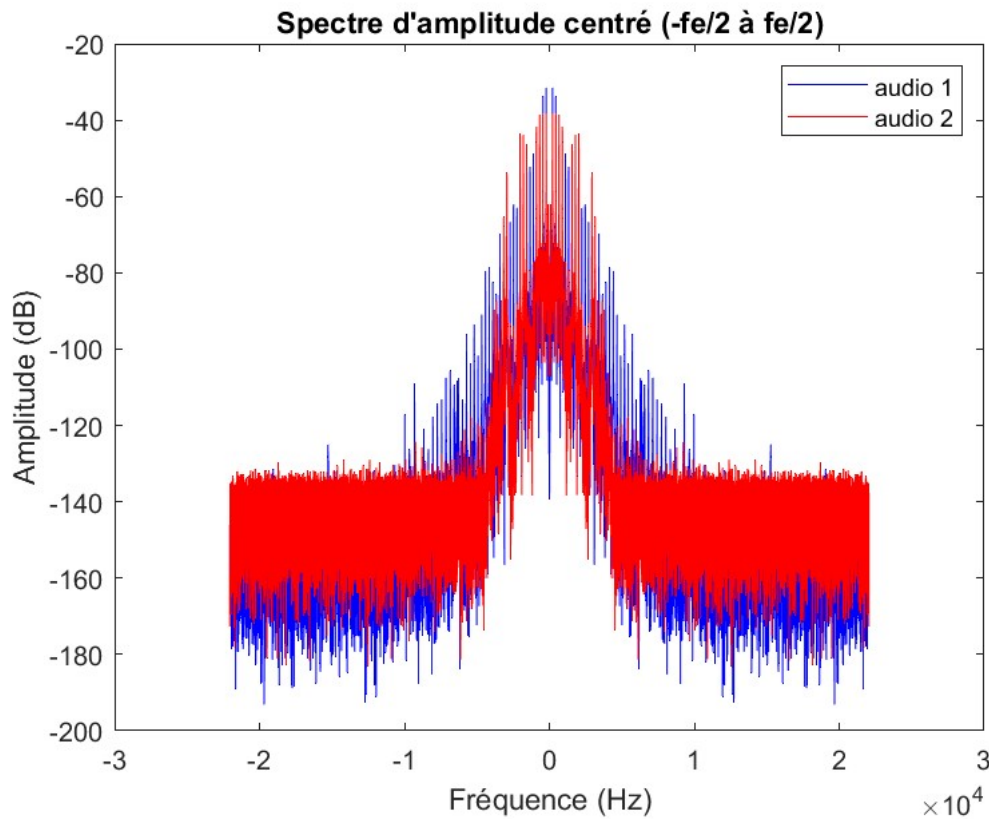
Après visualisation de plusieurs spectres, on a $f_1 = 220\text{Hz}$



Question 1.2

Code

Fichier en question : question_1_2.m



L'audio 2 présente un lobe principal bien défini et des lobes latéraux fortement atténués, ce qui lui donne un spectre plus harmonieux (moins de fuite spectrale) que l'audio 1.

TABLE 1 – Fréquences théoriques, mesurées et inharmonicité

| Fréquences (Hz) | f2 | f3 | f4 | f5 | f6 | f7 |
|-----------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| Théorique | 440 | 660 | 880 | 1100 | 1320 | 1540 |
| Mesurées Audio 1 | 442.04 | 663.22 | 885.05 | 1108.34 | 1331.46 | 1556.36 |
| Mesurées Audio 2 | 442.78 | 667.42 | 892.49 | 1117.56 | 1347.39 | 1572.03 |
| Inharmonicité Audio 1 | 8,01 | 8,43 | 9,91 | 13,08 | 14,97 | 18,29 |
| Inharmonicité Audio 2 | 10,90 | 19,35 | 24,40 | 27,42 | 35,56 | 35,64 |

L'audio 1 a, d'après les calculs, des meilleures harmoniques théoriquement que l'audio 2.

1.2. Synthèse

Question 1.3

Code

Fichier en question : question_1_3.m

On va donc synthétiser l'audio 1

TABLE 2 – Amplitudes en fonction des fréquences

| Fréquences (Hz) | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 | f6 | f7 |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Amplitudes (dB) | -31.46 | -33.80 | -46.98 | -45.70 | -48.88 | -52.17 | -53.59 |

Question 1.4

Code

Fichier en question : question_1_4.m

Question 1.5

Code

Fichier en question : question_1_5.m

Oui, le résultat obtenu semble fortement similaire au résultat précédent.

2. Synthèse soustractive

Question 2.1

Signal carré :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}, \quad x(t+T) = x(t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt - \int_{T/2}^T \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \left[\frac{\sin(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k/T} \right]_0^{T/2} - \left[\frac{\sin(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k/T} \right]_{T/2}^T \\
 &= 0 \Rightarrow a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

↳ ok, mais quelles seraient les limites? l'échantillonnage peut créer des problèmes...

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt - \int_{T/2}^T \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(\left[-\frac{T \cos(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k} \right]_0^{T/2} - \left[-\frac{T \cos(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k} \right]_{T/2}^T \right) \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{T(-1)^k}{2\pi k} + \frac{T}{2\pi k} - \frac{T(-1)^k}{2\pi k} \right) \\
&= \frac{2}{\pi k} \left((-1)^k + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{si } k \text{ impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

Signal en dent de scie :

$$x(t) = 2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right), \quad x(t+T) = x(t)$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T 2 \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \frac{2}{T} \left[\frac{t^2}{2T} - \frac{t}{2} \right]_0^T = 0
\end{aligned}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt = 0 \quad (\text{fonction impaire sur } [0, T])$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{4}{T^2} \int_0^T t \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt \\
&= \frac{4}{T^2} \left[-\frac{Tt \cos(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k} \right]_0^T + \int_0^T \frac{T \cos(2\pi k \frac{t}{T})}{2\pi k} dt \quad (\text{Donnée barrée}) \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}
\end{aligned}$$

Pour vérifier numériquement, on fait la fft des deux signaux et on compare numériquement les valeurs des amplitudes aux valeurs analytiques. Une des limite est que la fft permet d'aller jusqu'à $\frac{f_c}{2}$ et non jusqu'à l'infini

Question 2.2

On a :

$$y(k) = \frac{1}{2}(x(k) + x(k-1))$$

*C'est oui et non. FFT est périodique.
On s'attendait plutôt à une figure!*

La réponse impulsionnelle est donc :

$$h(k) = \frac{1}{2} (u(k) + u(k-1))$$

Transformée de Fourier discrète :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-j\omega k} = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega/2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Donc :

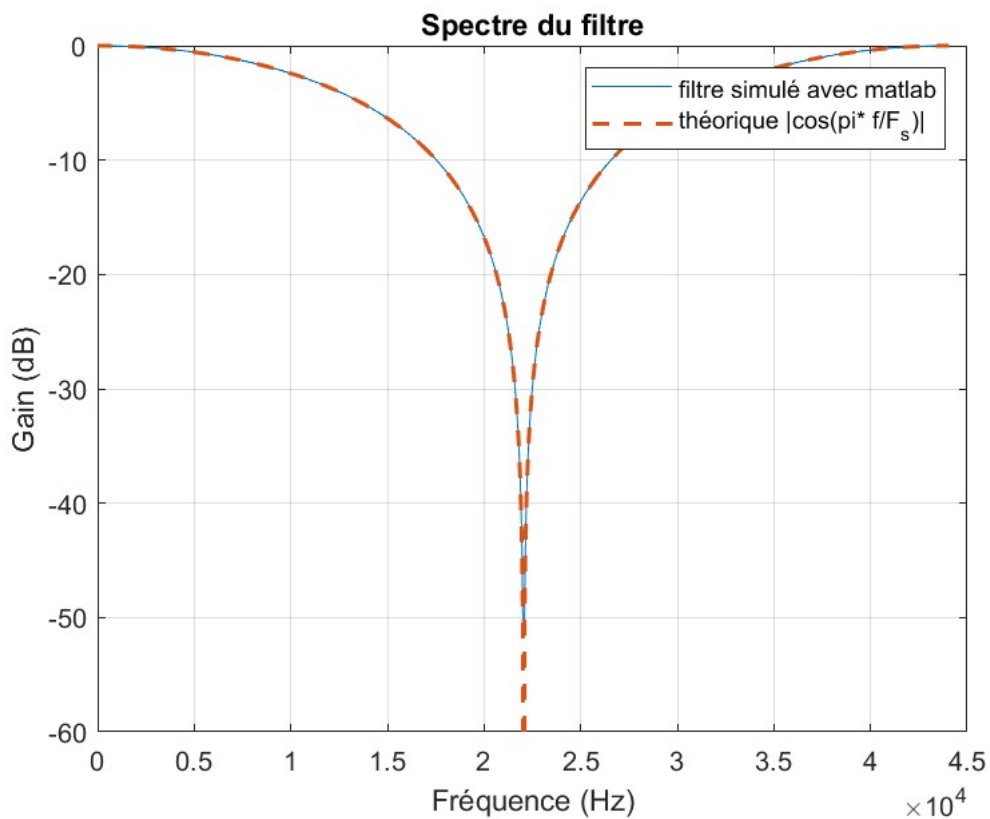
$$|H(e^{j\omega})| = \left| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(e^{j\omega})) = -\frac{\omega}{2}$$

On prend :

$$\omega = \frac{2\pi f}{F_s}$$

Code

Fichier en question : question_2_2.m



On remarque que notre spectre théorique et le spectre calculé avec matlab est le même.

3. Effets audio-numériques

3.1. Effets de réverbération

3.1.1. Mesure de réponse impulsionnelle

Question 3.1

$$y(k) = (h * x)(k) = \sum_m h(m)x(k-m)$$

$$\begin{aligned} \text{or } R_{yx}(u) &= \sum_m y(m)x(m+u) \\ &= \sum_m \left(\sum_l h(l)x(m-l) \right) x(m+u) \\ &= \sum_l h(l) \sum_m x(m-l)x(m+u) \\ &= \sum_l h(l) R_{xx}(u+l) \\ &= (h(-l) * R_{xx}(l))(u) \end{aligned}$$



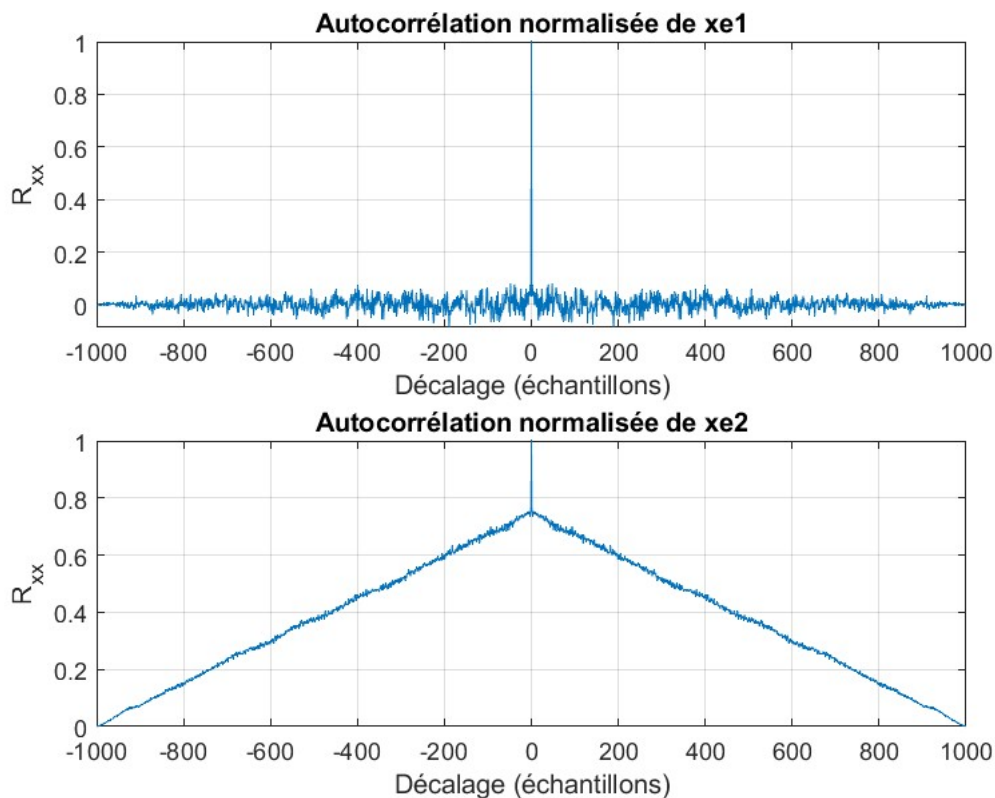
Question 3.2

Si $R_{xx}(u) = d(u)$ alors $R_{xy}(u) = h(-u)$ \rightarrow et R_{yx} du coup? relation entre les 2.
Il suffit donc de calculer l'intercorrélation entre x et y pour déterminer h .

Question 3.3

Code

Fichier en question : question_3_3.m

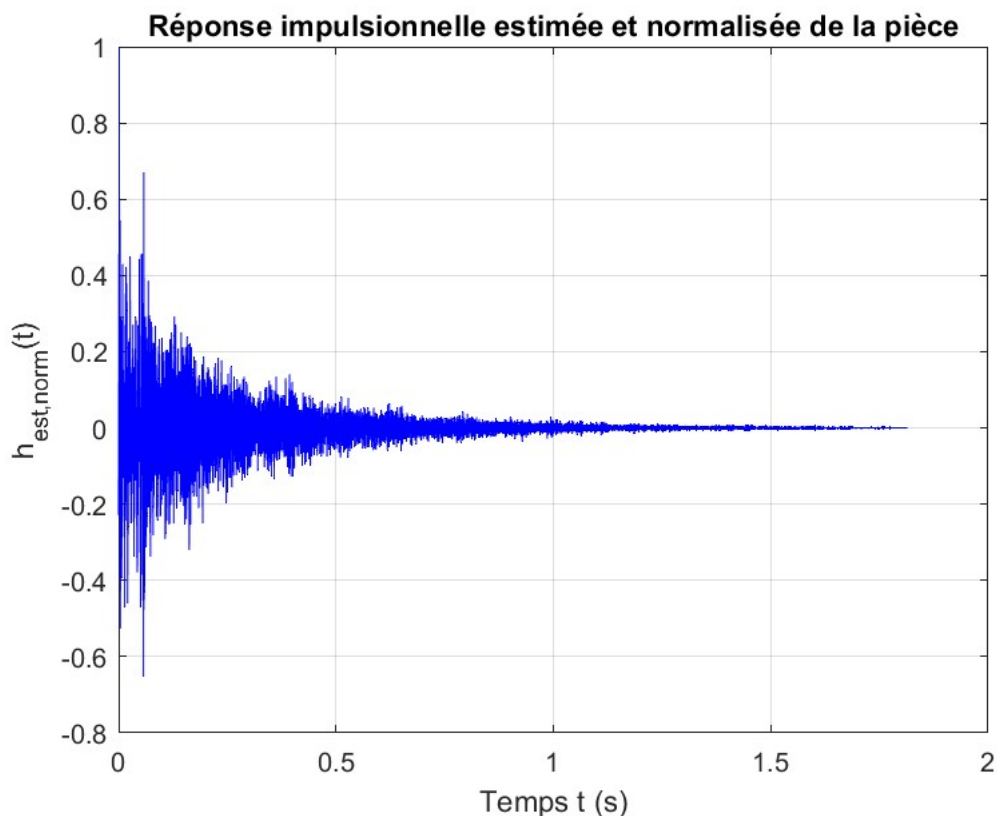


La comparaison des fonctions d'autocorrélation normalisées démontre que $xe1$ présente un profil d-like (pic unique à $u=0$ et lobes latéraux quasi nuls), tandis que $xe2$ a un profil étalé en triangle. On choisit donc $xe1$ comme signal d'excitation pour la mesure de la réponse impulsionnelle.

Question 3.4

Code

Fichier en question : question_3_4.m



Impulsion directe ($t = 0s$) Pic à 1 : c'est la directivité du haut-parleur vers le micro, sans réflexion.

Réflexions précoces ($< 50 ms$) Plusieurs oscillations de forte amplitude immédiatement après le pic : échos sur les parois proches (murs, plafond, sol).

Décroissance exponentielle ($50 ms \rightarrow 1 s$) L'amplitude décroît de façon quasi exponentielle, traduisant l'absorption et la diffusion progressive.

Queue de réverbération ($> 1 s$) Au-delà d'environ 1 s, le signal fluctue autour de zéro, proche du niveau bruit, montrant la fin de la réverbération audible.

3.1.2. Convolution classique

Question 3.5

Code

Fichier en question : effet_reverb.m

Question 3.6

Code

Fichier en question : test_effet_reverb.m

La moyenne sur 17 mesures est de 0,62 s pour traiter le signal.

3.1.3. Convolution rapide

Question 3.7

Code

Fichier en question : effet_reverb_FFT.m et question_3_7.m

Pour la fonction avec FFT, la moyenne sur 17 mesures est de 0,011 s pour traiter le signal. l'implémentation par FFT permet de ramener le temps de calcul moyen à seulement 0,011 s, soit une accélération d'un facteur 50 par rapport à la convolution directe.

Question 3.8

Oui, la convolution par FFT revient à faire la même chose que conv, à deux conditions : d'abord on ajoute suffisamment de zéros devant et derrière les deux signaux pour éviter que l'IFFT ne "renvoie" des échos circulaires, ensuite on choisit une taille de FFT au moins égale à la somme des longueurs moins un. Avec ce zero-padding, la FFT transforme la convolution linéaire en produit fréquentiel sans perte d'information. En pratique, les très petits écarts (10^{12} environ) dus aux arrondis flottants sont inaudibles, et on garde exactement le même résultat que la convolution directe, tout en profitant d'un gain de vitesse majeur sur les gros signaux.

3.2. Effet de retard

Question 3.9

$$(n-1)\tau < k < n\tau : \quad h(k) = u(k) - gh(k-\tau)$$

$$\text{or } k - \tau \notin \tau\mathbb{N} \text{ et } k - \tau < (n-1)\tau$$

$$\text{donc } h(k-\tau) = 0$$

$$\text{donc } h(k) = 0$$

$$\text{On a donc } h(k) = \begin{cases} (-g)^n & \text{si } k = n\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y(k) = x(k) - gy(k-\tau)$$

? erreur de formatage?

$$\text{donc } h(k) = u(k) - gh(k - \tau)$$

On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$h(k) = \begin{cases} (-g)^n & \text{si } k = n\tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $k = 0$:

$$h(0) = u(0) - gh(-\tau)$$

Or $h(-\tau) = 0$ car $-\tau < 0$

$$\text{donc } h(0) = 1$$

Pour $0 < k < \tau$:

$$h(k) = u(k) - gh(k - \tau)$$

Or $h(k - \tau) = 0$ car $k - \tau < 0$
et $u(k) = 0$ car $k > 0$

$$\text{donc } h(k) = 0$$

Pour $k = \tau$:

$$h(\tau) = u(\tau) - gh(0) = g$$

Pour $k = n\tau$ avec $n > 1$:

$$h(k) = u(n\tau) - gh((n-1)\tau) = -g \times (-g)^{n-1} = (-g)^n$$

Question 3.10

$$y(h) = x(k) - gy(h - \tau)$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{g + gz^{-\tau}}$$

$$\text{donc } 1 + gz^{-\tau} = 0 \Leftrightarrow z = \left| \frac{-1}{g} \right|^{\frac{1}{\tau}} e^{j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{\tau}\right)}$$

C'est stable à condition que les pôles soient absolument $< 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{g} \right|^{\frac{1}{\tau}} < 1 \Rightarrow |g| > 1$

→ Pourquoi trans. en z
non vue en cours?
Y'aurait été simple!
(Série géométrique)

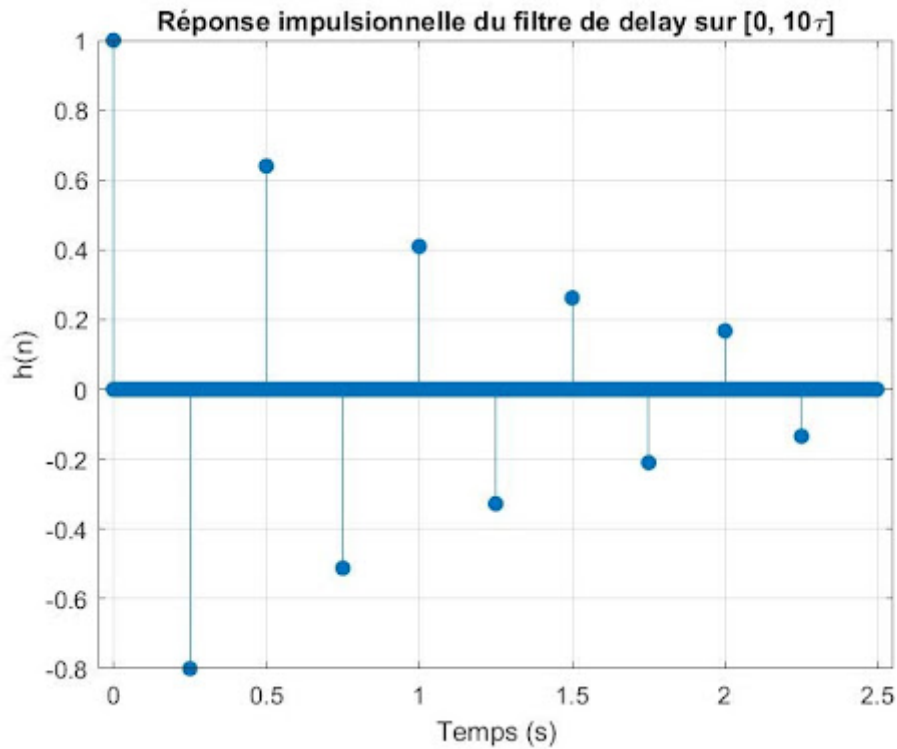
Question 3.11

On a donc par identification : $b = 1$ et $a = (1, 0, \dots, 0, g)$

Question 3.12

Code

Fichier en question : analyse_delay.m



✓

Question 3.13

$$y(k) = x(k) - gy(k - \tau) \Leftrightarrow Y(z) = X(z) - gz^{-\tau}Y(z)$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{1 + gz^{-\tau}}$$

$$\text{donc } \hat{h}(\nu) = H(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{1 + ge^{-j2\pi\nu\tau}}$$

$$|\hat{h}(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + g^2 + 2g \cos(2\pi\nu\tau)}}$$

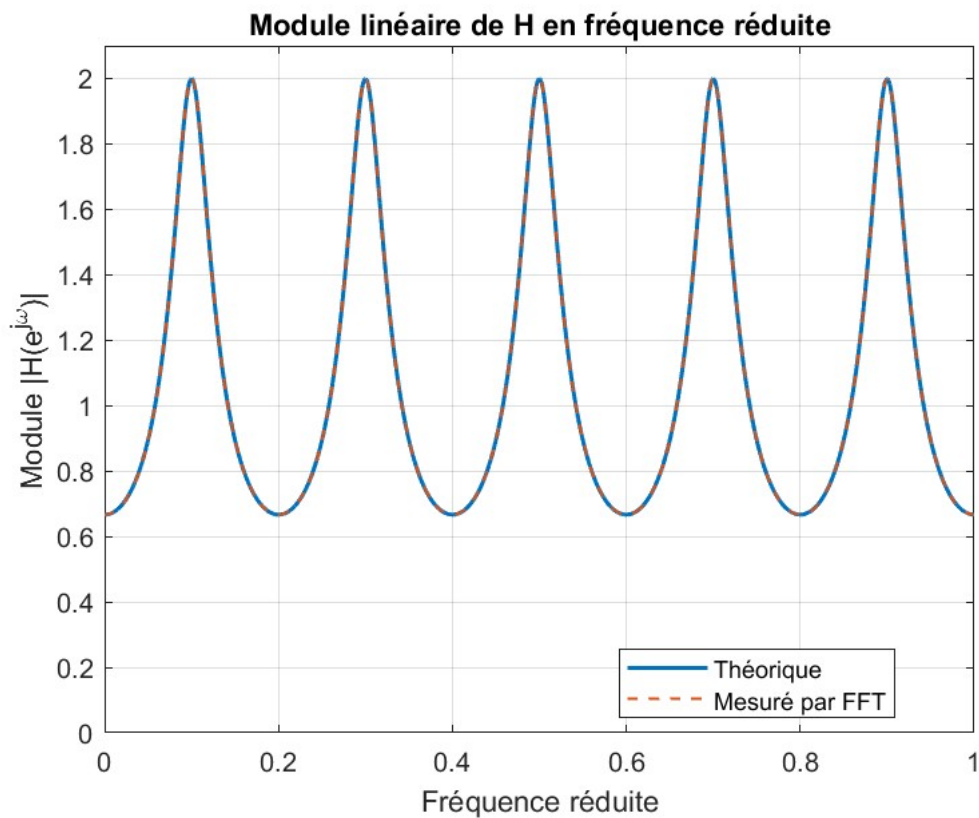
$$\text{et } \arg(\hat{h}(\nu)) = \arctan\left(\frac{g \sin(2\pi\nu\tau)}{1 + g \cos(2\pi\nu\tau)}\right)$$

ok.

Question 3.14

Code

Fichier en question : question_3_14.m



Les deux modèles sont les mêmes à un tout petit décalage près lié aux approximations faites lors des calculs.

Question 3.15

Code

Fichier en question : effet_delay.m

Question 3.16

Code

Fichier en question : test_effet_delay.m

Question 3.17

Code

Fichier en question : effet_delay_filtre.m

Question 3.18

Code

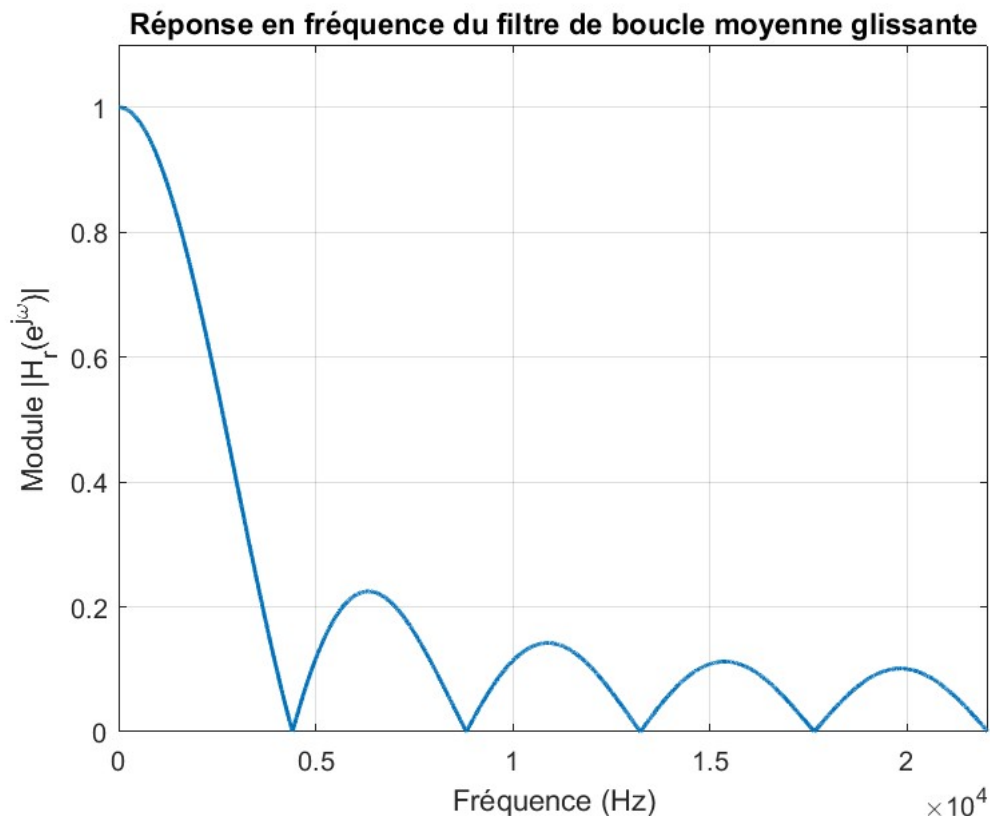
Fichier en question : test_effet_delay_filtre.m

On croirait presque entendre une vraie touche de piano !

Question 3.19

Code

Fichier en question : question_3_19.m



On voit bien sur cette courbe que les hautes fréquences sont atténuées.

4. Conclusion

Ce projet a permis d'explorer et d'appliquer diverses techniques de traitement du signal audio. À travers la synthèse additive et soustractive, nous avons compris comment créer et manipuler des sons en utilisant des méthodes de superposition et de filtrage. Enfin, les effets audio-numériques nous ont montré comment modifier et enrichir les sons pour des applications artistiques. Ce projet a non seulement renforcé notre compréhension théorique, mais a également développé nos compétences pratiques en utilisant Matlab pour l'analyse et la synthèse des sons.

OUR WORLDWIDE PARTNERS UNIVERSITIES - DOUBLE DEGREE AGREEMENTS



3 CAMPUS



IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire – <http://www.imt-atlantique.fr/>

Campus de Brest

Technopôle Brest-Iroise
CS 83818
29238 Brest Cedex 3
France
T +33 (0)2 29 00 11 11
F +33 (0)2 29 00 10 00

Campus de Nantes

4, rue Alfred Kastler
CS 20722
44307 Nantes Cedex 3
France
T +33 (0)2 51 85 81 00
F +33 (0)2 99 12 70 08

Campus de Rennes

2, rue de la Châtaigneraie
CS 17607
35576 Cesson Sévigné Cedex
France
T +33 (0)2 99 12 70 00
F +33 (0)2 51 85 81 99



IMT Atlantique

Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom