

IMT Atlantique

Dépt. Systèmes énergétiques et environnement

Technopôle de Brest-Iroise - CS 83818

29238 Brest Cedex 3

Téléphone : +33 (0)2 29 00 13 04

Télécopie : +33 (0)2 29 00 10 12

URL : www.imt-atlantique.fr



Compte rendu de TP

DIFFUSION PUBLIQUE

SAR : Compte rendu du TP audio

Jeremiah Kopp

Moronville Paul

Date d'édition : 28 mai 2025



IMT Atlantique

Bretagne-Pays de la Loire

École Mines-Télécom

Sommaire

1. Synthèse additive	3
1.1.	3
1.2.	4
1.3.	4
1.4.	5
1.5.	6
2. Synthèse soustractive	7
3. Effets audio-numériques	16
3.1. Effets de réverbération	16
3.2. Estimation de réponse impulsionnelle	16
3.3. Mesure des intercorrélations	17
3.4. Réponse impulsionnelle estimée de la pièce	17
3.5. Application de la réverbération par convolution	18
3.6. Test de la fonction effet_reverb	19
3.7. fonction reverb FFT	20
3.8. Conclusion sur l'utilisation de la FFT	20
3.9. Effet de retard	21
3.10.	22
3.11.	22
3.12.	22
3.13.	23
3.14.	24
3.15.	24
3.16.	24
3.17.	25
3.18.	25
3.19.	26
Références	27

Liste des figures

1.	Extrait de piano1 régénéré sans ADSR	4
2.	Enveloppe ADSR	5
3.	Extrait de piano1 régénéré avec ADSR	5
4.	Spectre du signal carré : seules les harmoniques impaires sont présentes.	7
5.	Spectre du signal dent de scie : toutes les harmoniques sont présentes.	8
6.	Réponse fréquentielle théorique du filtre passe-bas d'ordre 1 : $ H(f) = \cos(\pi fT) $	9
7.	Spectre du signal carré avant et après filtrage passe-bas d'ordre 1	10
8.	Spectre du signal dent de scie avant et après filtrage passe-bas d'ordre 1	11
9.	Spectre du signal carré avant et après filtrage	12
10.	Forme d'onde temporelle du signal carré filtré	13
11.	Spectre du signal dent de scie avant et après filtrage	14
12.	Forme d'onde temporelle du signal dent de scie filtré	14
13.	Fonctions d'autocorrélation des deux signaux d'excitation x_{e1} (en haut) et x_{e2} (en bas) . .	17
14.	Réponse impulsionnelle estimée de la pièce (avec x_{e1})	18
15.	Implémentation de la fonction effet_reverb en MATLAB	19
16.	Test de la fonction effet_reverb et mesure du temps d'exécution	19
17.	Fonction effet_reverb_FFT : filtrage fréquentiel par transformée de Fourier	20
18.	$h(k)$	22
19.	$h(k)$ avec h non nulle	23
20.	Réponses théorique et numérique	24
21.	Spectre de l'accord avec délai	26

Liste des tableaux

1.	Inharmonicité du piano 1 ($f_1 = 220.456$ Hz)	4
2.	Inharmonicité du piano 2 ($f_2 = 217.931$ Hz)	4

1. Synthèse additive

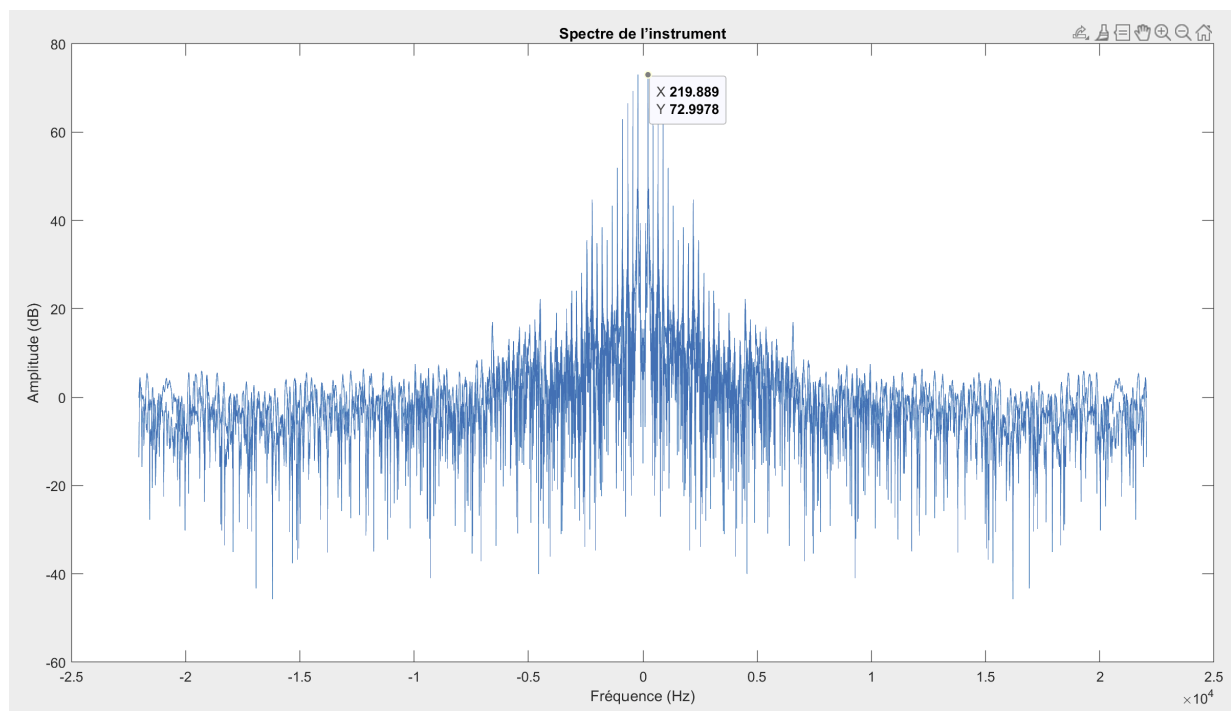
1.1.

Pour introduire le problème, on va visualiser quelques signaux. Pour cela il faudra extraire les données du wav, en faire la transformée de Fourier puis les afficher (en dB). C'est ce que fait le code suivant, avec `single_tone_guitar_nylon_string_a3.wav` :

```
[x,fe] = audioread('single_tone_guitar_nylon_string_a3.wav');
X = fft(x);
X_shifted = fftshift(X);
N = length(X);
f = linspace(-fe/2, fe/2, N);
amplitude_dB = 20*log10(abs(X_shifted));

plot(f, amplitude_dB, "Color", [0.00 0.4470 0.7410]);
xlabel('Frequence (Hz)');
ylabel('Amplitude (dB)');
title('Spectre de l instrument');
```

Ce qui donne :



On a donc une fréquence fondamentale à 219.889 Hz, et une décroissance linéaire (en dB) sur les 2e 3e et 4e harmoniques. La décroissance ensuite est très rapide et les harmoniques supérieures sont très atténuées. Ceci diffère beaucoup du violoncelle qui a une 6e harmonique très peu atténuée, et une décroissance lente. Pour les instruments à vent on observe un comportement similaire. Tous les instruments avec "a3" signifient que la note jouée est le La3 aux alentours de 440Hz (selon la finesse d'accord de l'instrument), mais la fréquence observée est toujours le La2 à 220Hz.

1.2.

Fréquence (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)	f_7 (Hz)
Théorique	440.91	661.37	881.82	1102.28	1322.74	1543.19
Mesurée	442.12	663.31	885.66	1108.42	1331.54	1556.29
Inharmonicité	4.75	5.07	7.52	9.62	11.48	14.63

TABLE 1 – Inharmonicité du piano 1 ($f_1 = 220.456$ Hz)

Fréquence (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)	f_7 (Hz)
Théorique	435.86	653.79	871.72	1089.66	1307.59	1525.52
Mesurée	443.00	668.08	892.72	1117.79	1347.19	1572.26
Inharmonicité	27.93	36.63	42.82	43.93	52.63	54.41

TABLE 2 – Inharmonicité du piano 2 ($f_2 = 217.931$ Hz)

On voit que l'inharmonicité minimale du piano 2 est supérieure à l'inharmonicité maximale du piano 1. Donc le piano 1 est bien plus harmonieux que le piano 2.

1.3.

On régénère le son de piano1 à partir de ses 8 premières harmoniques. Une fois le son généré, on entend un son peu réaliste et constant. La visualisation temporelle est peu interprétable, on s'intéresse donc à la visualisation fréquentielle du signal. Le signal généré est pur, avec seulement 8 fréquences. On devrait alors trouver un spectre à 8 bandes fines. On trouve ici un spectre plus riche car pour la régénération on a ré-échantillonné le signal ce qui est la source de cette richesse supplémentaire. En filtrant à 50 dB on retrouve bien le spectre attendu.

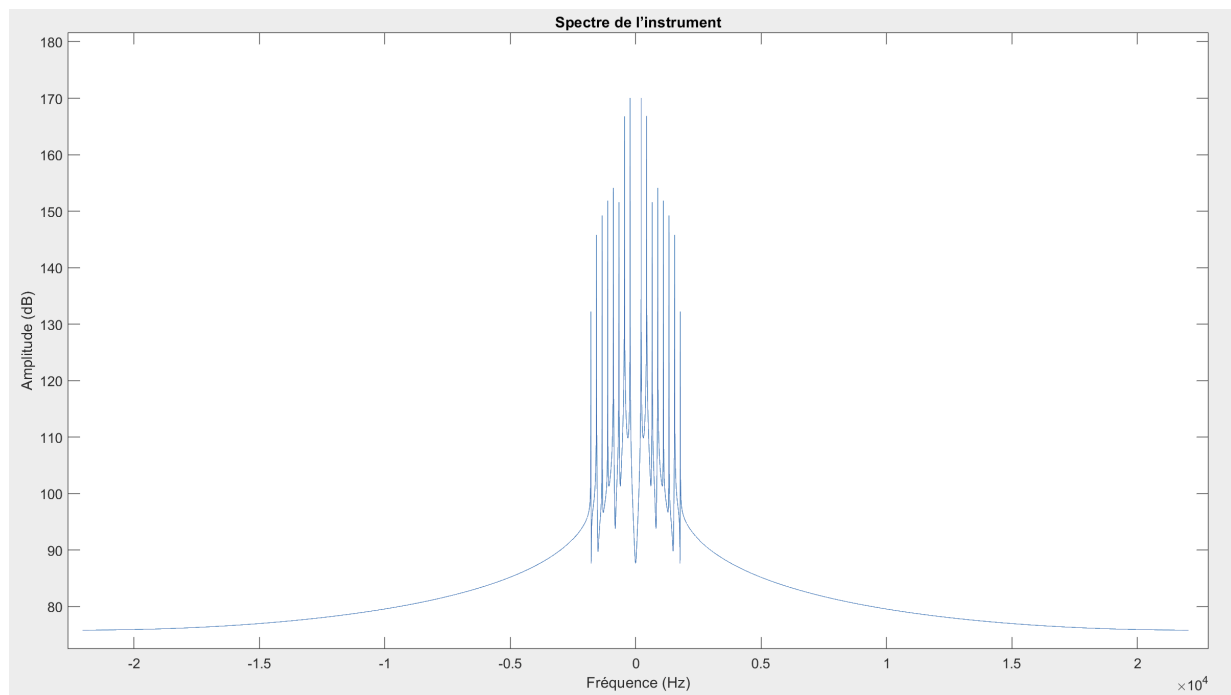


FIGURE 1 – Extrait de piano1 régénéré sans ADSR

1.4.

Pour rendre le son plus réaliste, on y ajoute une enveloppe ADSR qui va faire varier au cours du temps l'intensité sonore du piano. Voici l'enveloppe qui a été choisie, pour ressembler au mieux à un son de piano :

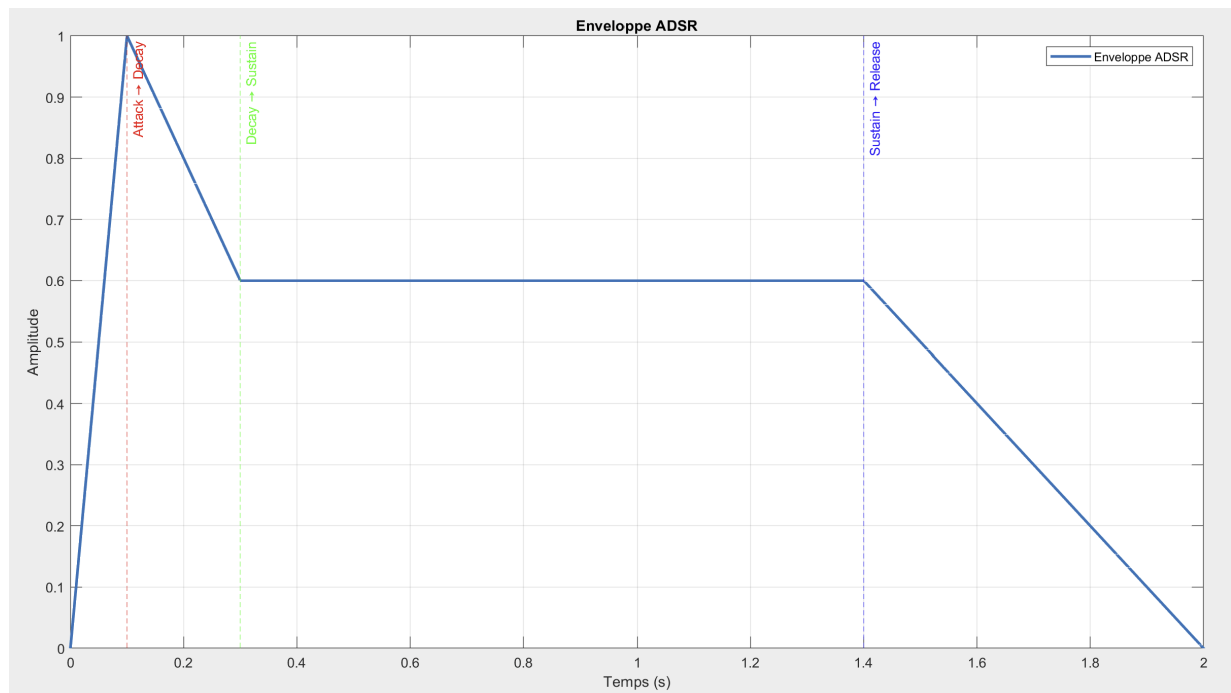


FIGURE 2 – Enveloppe ADSR

On obtient alors le spectre suivant, qui s'est étalé en hauteur (ce qui est cohérent puisqu'on fait varier l'intensité).

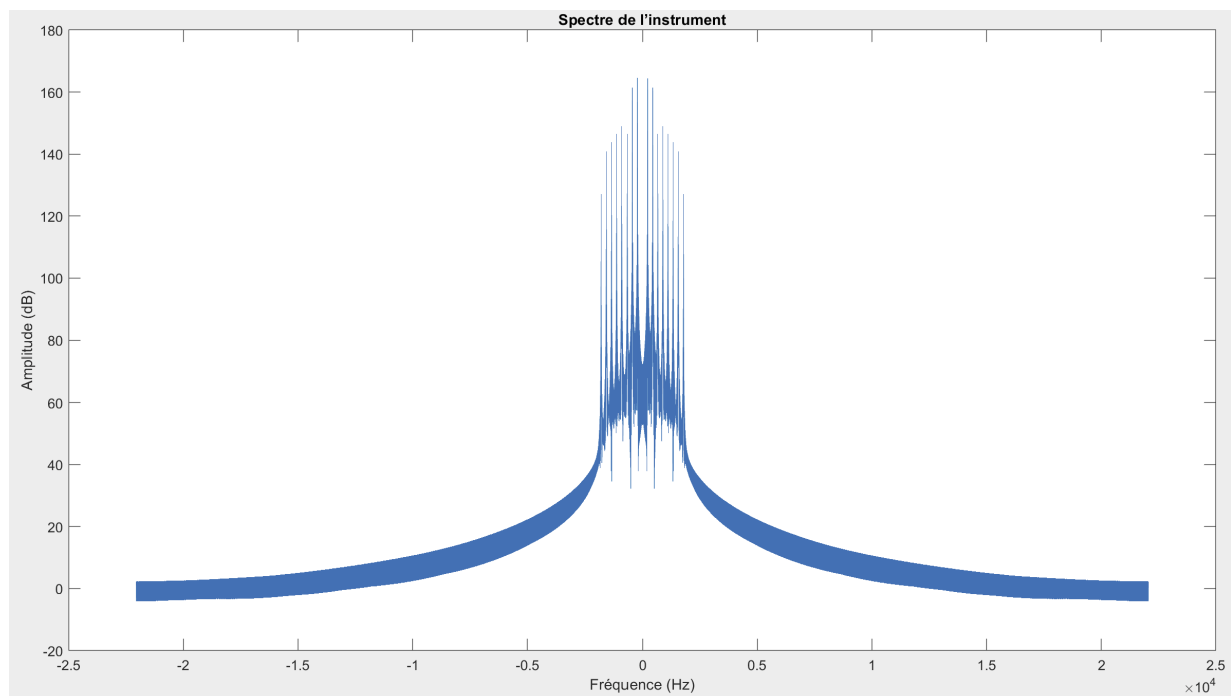


FIGURE 3 – Extrait de piano1 régénéré avec ADSR

1.5.

En partant des mêmes fréquences et amplitudes, on régénère le son mais cette-fois avec une transformée de Fourier inversée (IFFT). On obtient alors le même résultat, du moins la différence n'est pas audible. Le spectre est en dent de scie, avec uniquement les 8 fréquences décrites précédemment. C'est cohérent car on utilise les mêmes fréquences et amplitudes, à l'exception des quelques fréquences parasites dont on a parlé précédemment, mais qui sont à -50dB ce qui explique l'inaudibilité de la différence.

vspace1cm

2. Synthèse soustractive

2.1 — Calcul du spectre de signaux périodiques et vérification numérique

Dans cette question, nous cherchons à analyser et vérifier le spectre de deux signaux périodiques : un signal carré et un signal dent de scie, tous deux centrés, de période $T = 1$ s, et d'amplitude comprise entre -1 et $+1$.

Analyse théorique (séries de Fourier)

Signal carré : étant impair et périodique, il contient uniquement les harmoniques impaires de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T} = 1$ Hz. Son développement en série de Fourier est :

$$x_{\text{carré}}(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(2\pi n f_0 t)$$

Signal dent de scie : il contient toutes les harmoniques, avec une décroissance également en $1/n$:

$$x_{\text{scie}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(2\pi n f_0 t)$$

Vérification numérique (FFT)

Nous avons généré ces signaux dans MATLAB en les échantillonnant sur 5 périodes avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 1000$ Hz. Nous avons ensuite calculé leur transformée de Fourier discrète via la fonction `fft()`, puis affiché les spectres centrés grâce à `fftshift()`.

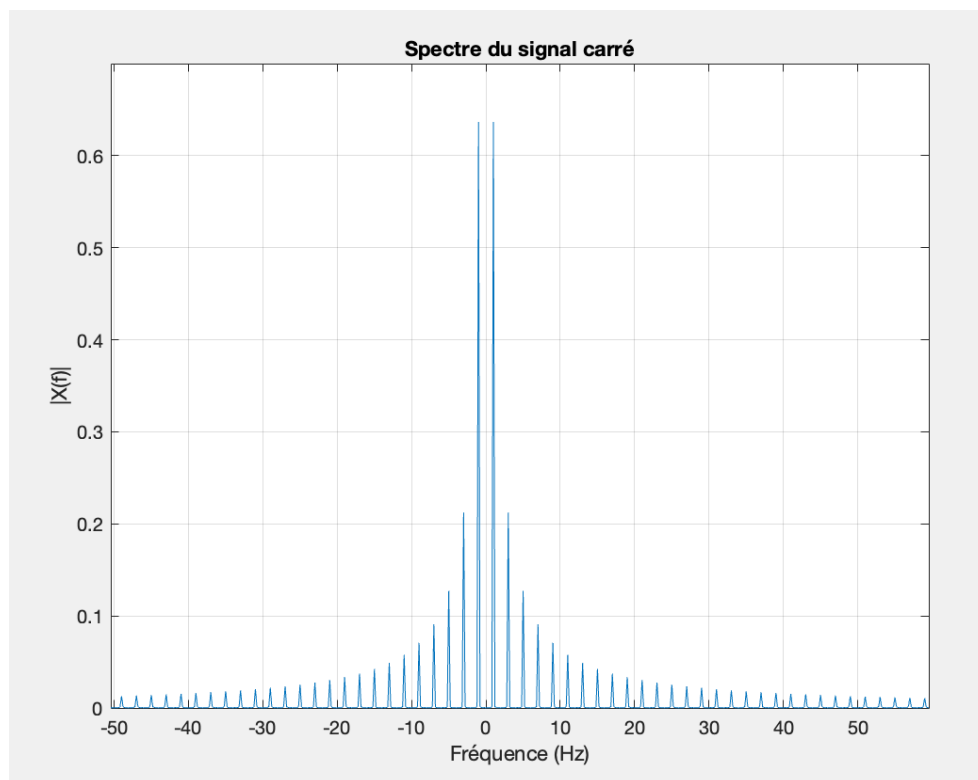


FIGURE 4 – Spectre du signal carré : seules les harmoniques impaires sont présentes.

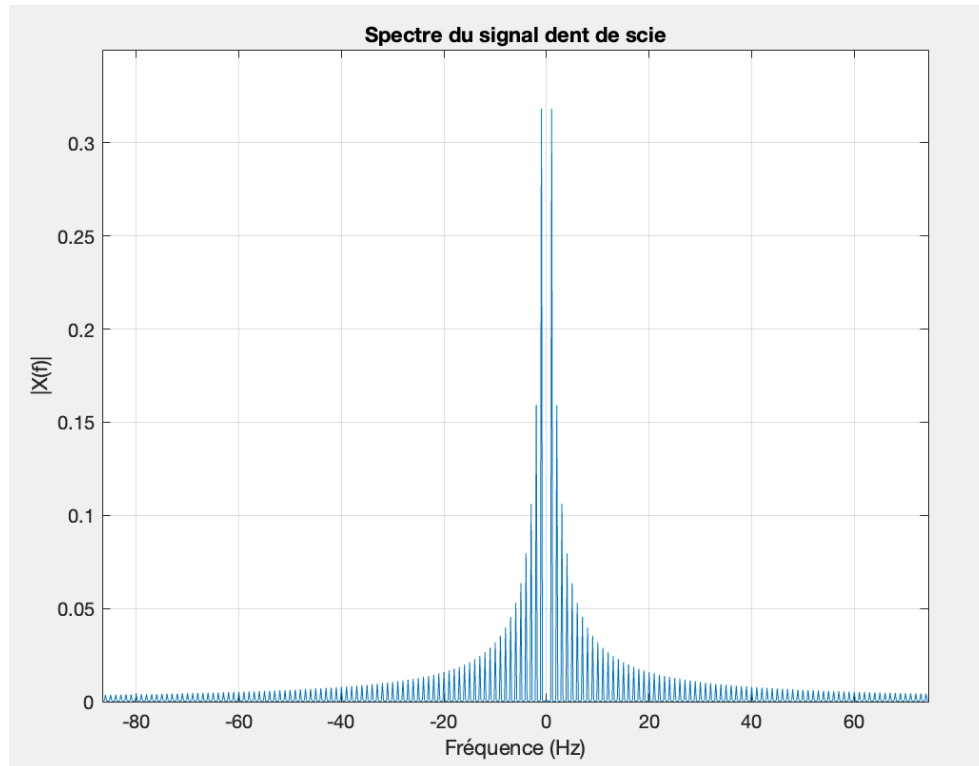


FIGURE 5 – Spectre du signal dent de scie : toutes les harmoniques sont présentes.

Les spectres obtenus correspondent parfaitement aux expressions analytiques : le signal carré présente uniquement des pics sur les fréquences impaires de f_0 tandis que le signal dent de scie présente toutes les harmoniques. L'amplitude des pics décroît proportionnellement à $\frac{1}{n}$ dans les deux cas.

Limites du modèle numérique

La méthode de vérification numérique par FFT reste soumise à plusieurs contraintes :

- La durée d'observation du signal est finie, ce qui introduit des effets de troncature (fuite spectrale).
- Le spectre réel est en théorie infini, mais la FFT ne peut représenter que les fréquences jusqu'à $F_e/2$ (théorème de Nyquist).
- Un nombre insuffisant de périodes ou une fréquence d'échantillonnage trop faible peut entraîner une mauvaise résolution fréquentielle ou un repliement de spectre.

Malgré ces limitations, les spectres obtenus sont conformes à la théorie et permettent de valider les expressions de Fourier des deux signaux.

2.2 — Filtrage passe-bas d'ordre 1 : analyse théorique et simulation

On considère le filtre passe-bas défini par la relation de récurrence :

$$y(k) = \frac{1}{2} (x(k) + x(k-1))$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 1, qui réalise une moyenne glissante sur deux échantillons. Son but est de lisser les hautes fréquences.

Fonction de transfert en fréquence

La transformée en fréquence de ce filtre est donnée par :

$$H(f) = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-j2\pi fT} \right)$$

où $T = 1/F_e$ est la période d'échantillonnage. On en déduit la "réponse en amplitude" :

$$|H(f)| = |\cos(\pi fT)|$$

Cela montre que le filtre agit comme un "filtre passe-bas", dont le gain décroît vers zéro lorsque f tend vers $F_e/2$ (la fréquence de Nyquist).

Ainsi, les fréquences basses sont transmises sans atténuation ($|H(0)| = 1$), tandis que les hautes fréquences sont progressivement supprimées ($|H(F_e/2)| = 0$).

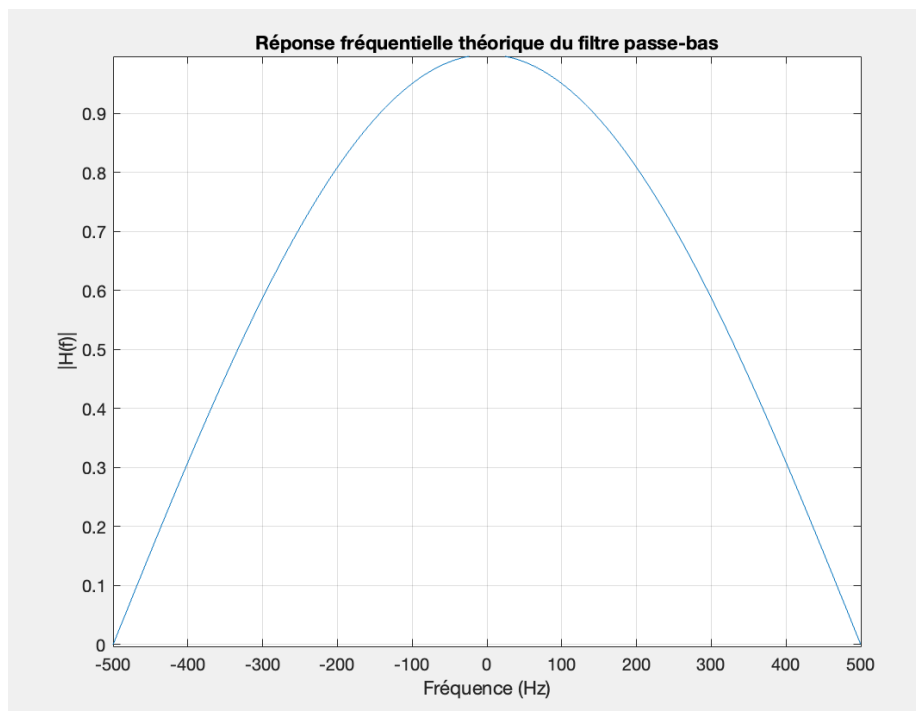


FIGURE 6 – Réponse fréquentielle théorique du filtre passe-bas d'ordre 1 : $|H(f)| = |\cos(\pi fT)|$

Application du filtre passe-bas d'ordre 1 sur les spectres

Nous avons appliqué le filtre passe-bas défini par :

$$y(k) = \frac{1}{2} (x(k) + x(k-1))$$

Le but est de vérifier l'effet du filtre sur les composantes fréquentielles du signal, et de s'assurer que le comportement observé est cohérent avec celui d'un filtre passe-bas.

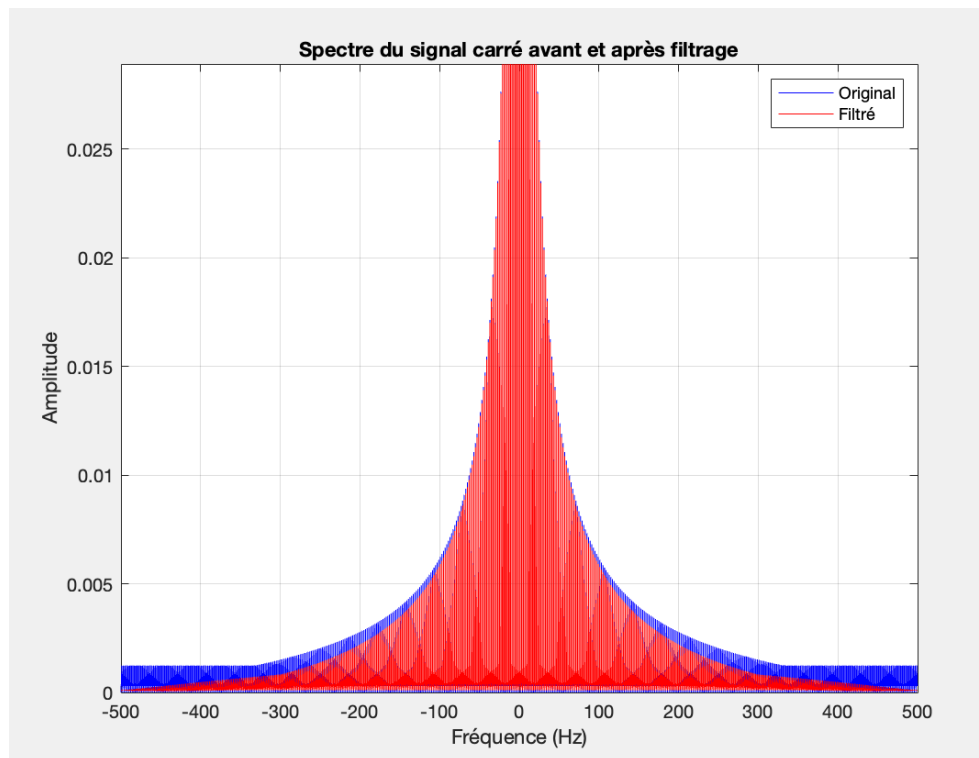


FIGURE 7 – Spectre du signal carré avant et après filtrage passe-bas d'ordre 1

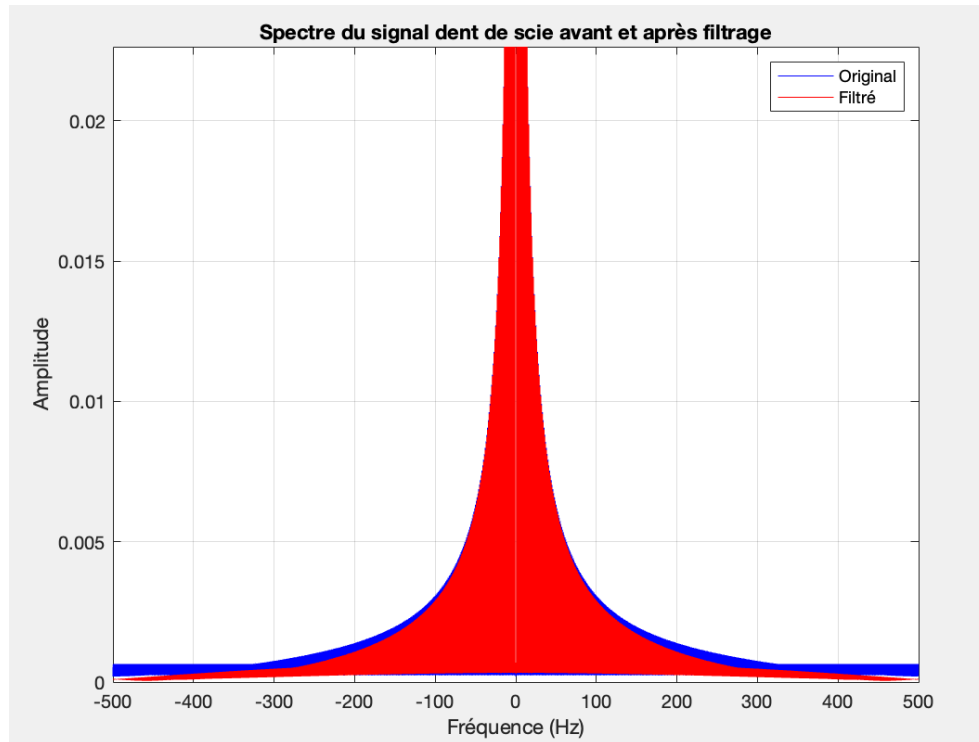


FIGURE 8 – Spectre du signal dent de scie avant et après filtrage passe-bas d'ordre 1

Observation et interprétation

Sur les deux figures ci-dessus, on observe que le filtrage :

- conserve correctement les composantes basses fréquences (pic fondamental),
- atténue progressivement les hautes fréquences,
- supprime efficacement les détails liés aux harmoniques élevées,

Ainsi, les spectres obtenus valident expérimentalement la fonction de transfert théorique du filtre. Ce résultat est conforme aux attentes : le filtre d'ordre 1 lisse les signaux en réduisant leur richesse harmonique.

2.4 - Synthèse soustractive à l'aide d'un filtre d'ordre 2

Afin d'explorer l'impact du filtrage sur la richesse spectrale d'un signal, nous utilisons dorénavant un filtre passe-bas d'ordre 2.

Filtrage d'ordre 2 du signal carré

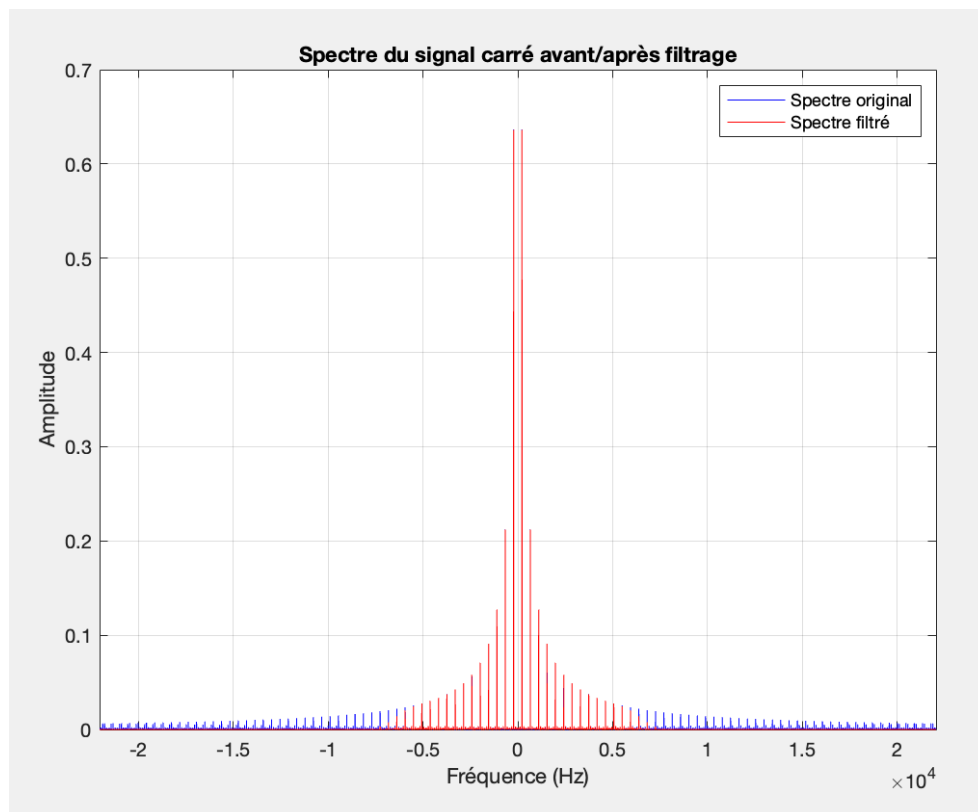


FIGURE 9 – Spectre du signal carré avant et après filtrage

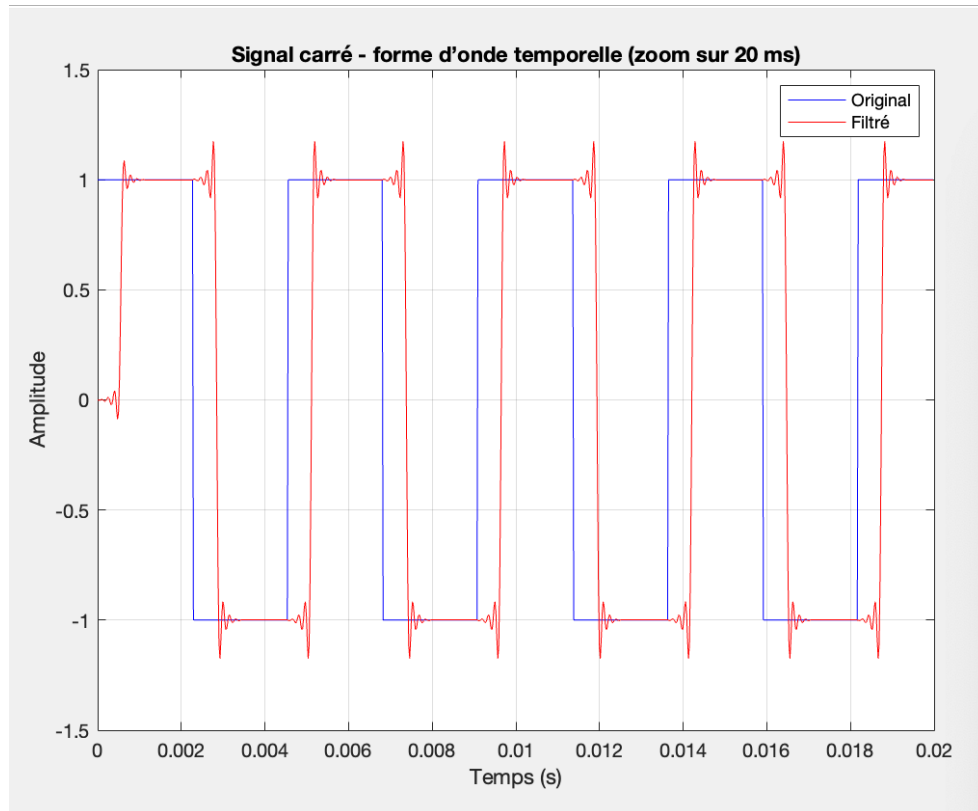


FIGURE 10 – Forme d'onde temporelle du signal carré filtré

Analyse

Le spectre filtré montre une nette atténuation des harmoniques supérieures, tout en conservant la fondamentale. La forme d'onde est visiblement lissée par rapport au carré initial. Le son obtenu est plus doux, moins agressif.

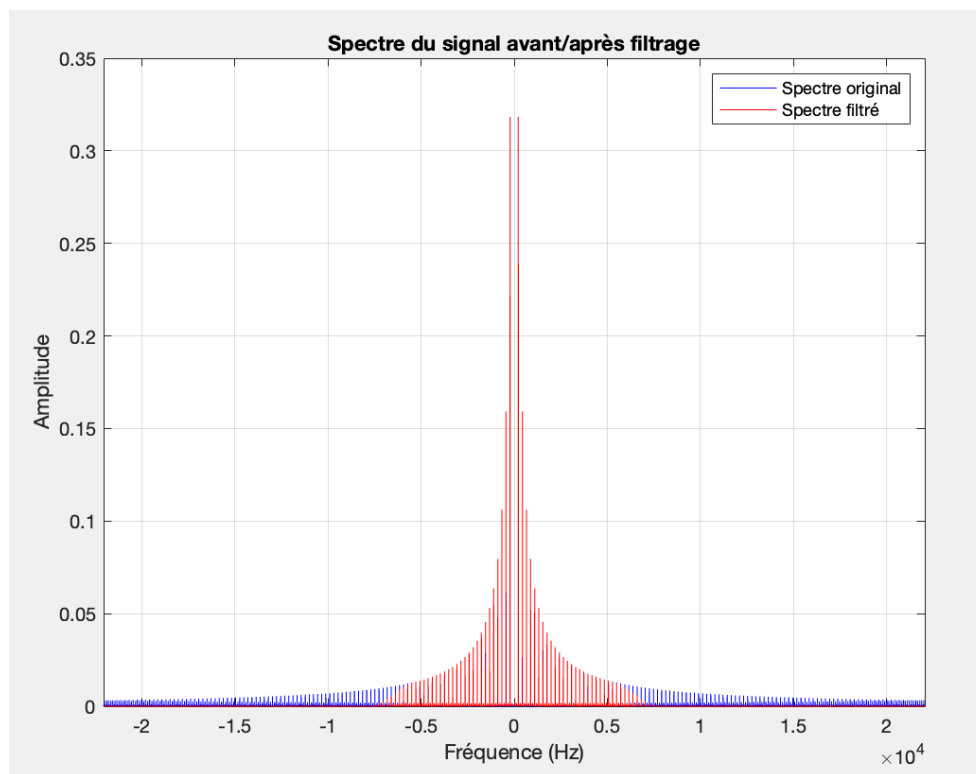
Filtrage du signal dent de scie

FIGURE 11 – Spectre du signal dent de scie avant et après filtrage

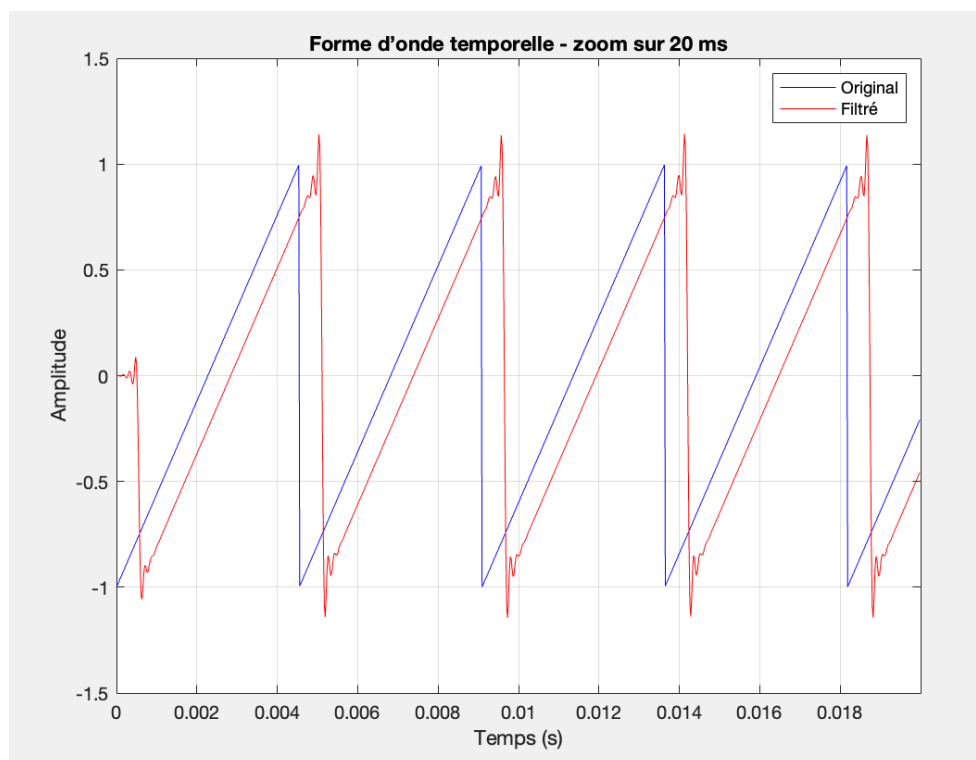


FIGURE 12 – Forme d'onde temporelle du signal dent de scie filtré

Analyse

Comme pour le carré, les hautes fréquences sont fortement atténuées. Cependant, comme le signal de base contient toutes les harmoniques, le résultat filtré présente un profil spectral plus dense à basse fréquence. La forme d'onde se rapproche d'une sinusoïde amortie.

Lors du filtrage du signal, on observe de petites oscillations près des transitions brutales. Cela pourrait être dû au fait que, lors du filtrage d'un signal discontinu avec un filtre passe-bas, il y a suppression des hautes fréquences. Cela a pour effet de provoquer des oscillations parasites localisées autour des discontinuités.

Conclusion

Après avoir écouté les sons obtenus par synthèse additive et soustractive, on remarque une différence notable dans l'effet de l'enveloppe. Dans le cas de la synthèse additive, l'enveloppe module directement l'amplitude des composantes au moment de leur génération : le son apparaît progressivement en suivant la forme de l'enveloppe. En revanche, dans la synthèse soustractive, l'enveloppe agit sur un signal déjà complet : son effet se fait entendre après coup, en atténuant progressivement le spectre du son.

3. Effets audio-numériques

3.1. Effets de réverbération

On cherche à exprimer la fonction d'intercorrélation $R_{yx}(u)$ entre le signal enregistré $y(k)$ et le signal d'excitation $x(k)$, en fonction de la réponse impulsionnelle $h(k)$ du système et de l'autocorrélation $R_{xx}(u)$ du signal d'entrée.

Le système est linéaire invariant dans le temps, donc :

$$y(k) = (h * x)(k) = \sum_m h(m) \cdot x(k - m)$$

Par définition, l'intercorrélation est donnée par :

$$R_{yx}(u) = \sum_k y(k + u) \cdot x(k)$$

En remplaçant $y(k + u)$ par son expression :

$$R_{yx}(u) = \sum_k \left[\sum_m h(m) \cdot x(k + u - m) \right] \cdot x(k)$$

On peut intervertir les deux sommes :

$$R_{yx}(u) = \sum_m h(m) \cdot \left[\sum_k x(k + u - m) \cdot x(k) \right]$$

L'expression entre crochets est la définition de $R_{xx}(u - m)$, donc :

$$R_{yx}(u) = \sum_m h(m) \cdot R_{xx}(u - m)$$

On reconnaît ici une convolution discrète entre h et R_{xx} . Ainsi, on obtient :

$$R_{yx}(u) = (h * R_{xx})(u)$$

Ce résultat signifie que la fonction d'intercorrélation entre la sortie et l'entrée est égale à la convolution entre la réponse impulsionnelle du système et l'autocorrélation du signal d'entrée.

3.2. Estimation de réponse impulsionnelle

À partir de la relation démontrée précédemment :

$$R_{yx}(u) = h * R_{xx}(u)$$

on suppose que le signal d'entrée $x(k)$ est choisi de telle sorte que son autocorrélation vérifie :

$$R_{xx}(u) \approx \delta(u)$$

c'est-à-dire qu'il est assimilable à un signal pseudo-bruit blanc. Dans ce cas, la convolution de h avec $\delta(u)$ donne directement :

$$R_{yx}(u) \approx h(u)$$

On en déduit donc que la réponse impulsionnelle est à peu près égale à l'intercorrélation entre x et y . Mesurons donc ces intercorrélations pour la déterminer.

3.3. Mesure des intercorrélations

Nous avons calculé l'autocorrélation de deux signaux candidats x_{e1} et x_{e2} , à l'aide de la fonction `xcorr` de MATLAB. Les résultats sont présentés ci-dessous :

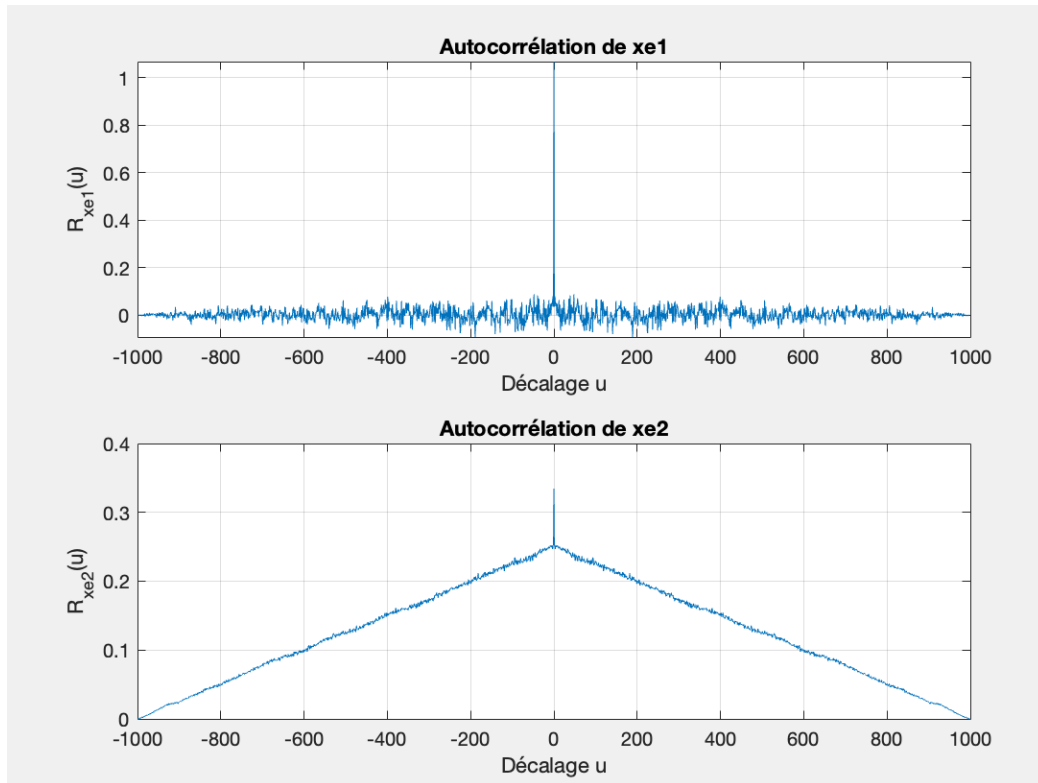


FIGURE 13 – Fonctions d'autocorrélation des deux signaux d'excitation x_{e1} (en haut) et x_{e2} (en bas)

Analyse :

On observe que :

- Le signal x_{e1} présente un pic d'autocorrélation très marqué en $u = 0$, et très faible ailleurs, ce qui le rapproche fortement d'une impulsion unité. Cela signifie que $R_{x_{e1}x_{e1}}(u) \approx \delta(u)$, ce qui est idéal pour estimer la réponse impulsionnelle via l'intercorrélation.
- À l'inverse, le signal x_{e2} montre une autocorrélation très étalée, avec une décroissance linéaire, ce qui indique que son spectre est très structuré. Il ne s'approche pas du tout d'une impulsion unité.

Le signal x_{e1} est donc clairement le plus adapté comme signal d'excitation pour mesurer la réponse impulsionnelle.

3.4. Réponse impulsionnelle estimée de la pièce

Nous avons utilisé la méthodologie pseudo-impulsionnelle pour estimer la réponse impulsionnelle de la pièce. Le signal d'excitation $x(k)$ choisi est x_{e1} , un signal pseudo-bruit dont l'autocorrélation est

proche d'une impulsion unité $\delta(u)$. L'effet de la pièce sur le signal a été simulé à l'aide de la fonction `simule_piece`. La réponse impulsionnelle $h(k)$ a ensuite été estimée à l'aide de la fonction `xcorr`, en calculant l'intercorrélation $R_{yx}(u)$, puis en l'affichant en fonction du temps. Le résultat est présenté ci-dessous :

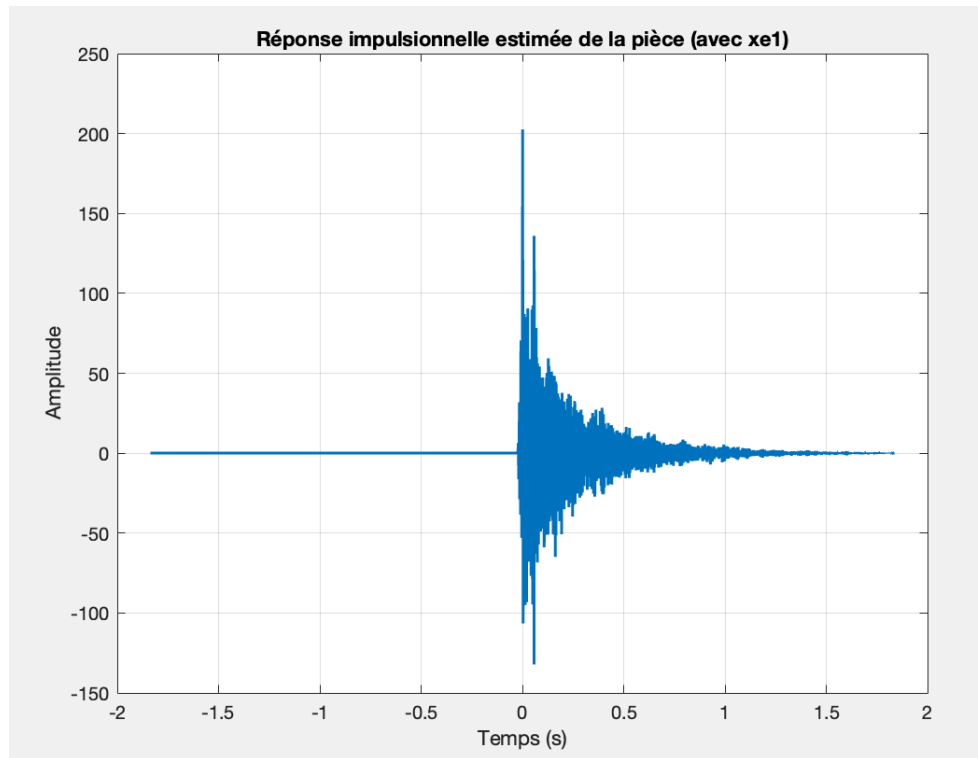


FIGURE 14 – Réponse impulsionnelle estimée de la pièce (avec x_{e1})

Conclusion :

Cette méthode permet de restituer efficacement la signature acoustique d'un environnement à partir d'un signal d'entrée adapté, en fournissant une estimation temporelle fine de la réponse impulsionnelle.

3.5. Application de la réverbération par convolution

Maintenant que nous disposons de la réponse impulsionnelle estimée du filtre représentant l'effet de la pièce, nous pouvons appliquer l'effet de réverbération au signal source. Cet effet consiste à réaliser la **convolution** du signal source $x(k)$ avec la réponse impulsionnelle $h(k)$, ce qui donne le signal réverbéré :

$$y(k) = h(k) * x(k)$$

Pour cela, nous avons implémenté une fonction `effet_reverb`, qui applique cette convolution en s'assurant que les signaux sont correctement formatés. L'implémentation MATLAB de cette fonction est présentée à la figure suivante :

```

function y = effet_reverb(x, h)

    % S'assurer que x et h sont des vecteurs colonnes
    x = x(:);
    h = h(:);

    % Convolution classique
    y = conv(x, h, 'full'); % 'full' pour conserver l'intégralité de la réverbération
end

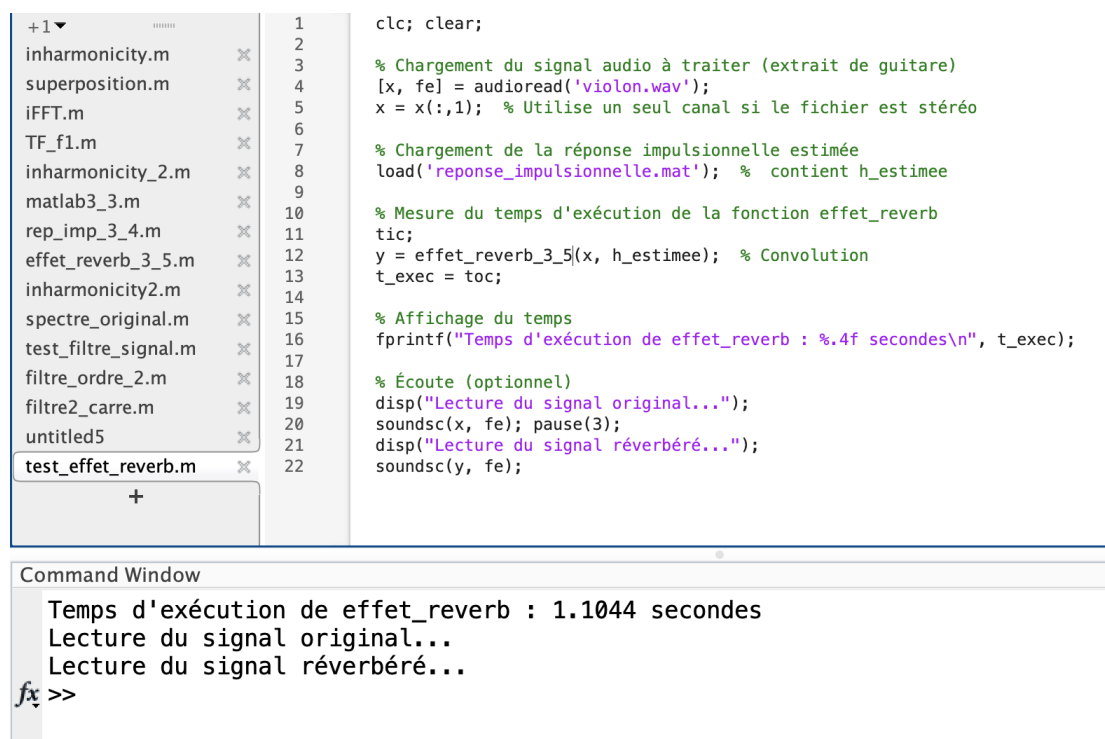
```

FIGURE 15 – Implémentation de la fonction `effet_reverb` en MATLAB

3.6. Test de la fonction `effet_reverb`

Nous avons testé la fonction `effet_reverb` sur un extrait sonore (`violon.wav`) en utilisant le script `test_effet_reverb`. L'exécution de la fonction a été encadrée par les commandes `tic` et `toc` afin de mesurer le temps de calcul.

La figure suivante montre le script utilisé ainsi que le temps mesuré dans la console MATLAB :

FIGURE 16 – Test de la fonction `effet_reverb` et mesure du temps d'exécution

Le temps d'exécution observé est de **1.1044 secondes**, ce qui reste tout à fait raisonnable pour un traitement audio hors-ligne.

3.7. fonction reverb FFT

```
function [y, temps] = effet_reverb_FFT(x, h)
% effet_reverb_FFT - Applique un effet de réverbération dans le domaine fréquentiel
%
% Entrées :
%   x : signal d'entrée (vecteur)
%   h : réponse impulsionnelle (vecteur)
%
% Sorties :
%   y : signal convolué (réverbéré)
%   temps : durée d'exécution (en secondes)

% Étape 1 : Déterminer la taille pour le calcul FFT (longueur max)
NFFT = max([length(x) length(h)]);

% Étape 2 : Appliquer la FFT sur les deux signaux (zéro-padding)
tic;
X = fft(x, NFFT);
H = fft(h, NFFT);

% Étape 3 : Multiplication dans le domaine fréquentiel
Y = X .* H;

% Étape 4 : Retour dans le domaine temporel
y = real(ifft(Y));

% Étape 5 : Enregistrer le temps de calcul
temps = toc;
end
```

FIGURE 17 – Fonction `effet_reverb_FFT` : filtrage fréquentiel par transformée de Fourier

3.8. Conclusion sur l'utilisation de la FFT

Le test effectué sur un extrait de *violon* a montré que la méthode utilisant la **FFT** est plus rapide, tout en produisant un signal réverbéré auditivement très proche de celui obtenu par la convolution directe. Cependant, pour que la méthode fréquentielle soit fiable, il est essentiel de :

- bien choisir la taille de la FFT ($NFFT \geq \max(\text{length}(x), \text{length}(h))$),
- appliquer un *zéro-padding* adéquat,
- et éviter les erreurs de repliement spectral.

En conclusion, la FFT permet une optimisation du temps de calcul, surtout sur des signaux de grande taille, tout en conservant une qualité perçue satisfaisante.

3.9. Effet de retard

On considère le système défini par la relation de récurrence :

$$y(k) = x(k) - g \cdot y(k - \tau)$$

et on souhaite déterminer sa réponse impulsionnelle $h(k)$, c'est-à-dire la sortie pour une entrée $x(k) = \delta(k)$.

- À l'instant $k = 0$:

$$y(0) = \delta(0) = 1$$

- À l'instant $k = \tau$:

$$y(\tau) = 0 - g \cdot y(0) = -g$$

- À l'instant $k = 2\tau$:

$$y(2\tau) = 0 - g \cdot y(\tau) = -g \cdot (-g) = g^2$$

- À l'instant $k = 3\tau$:

$$y(3\tau) = -g \cdot y(2\tau) = -g \cdot g^2 = -g^3$$

On va donc procéder par récurrence, pour montrer que :

$$h(k) = \begin{cases} (-g)^n & \text{si } k = n\tau \text{ avec } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve par récurrence de l'expression de $h(k)$

On souhaite démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$h(k) = (-g)^n \quad \text{si } k = n\tau$$

Initialisation ($n = 0$) : Déjà faite

Hérédité : supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y(n\tau) = (-g)^n$$

Montrons que :

$$y((n+1)\tau) = (-g)^{n+1}$$

À l'instant $k = (n+1)\tau$, on a :

$$y((n+1)\tau) = x((n+1)\tau) - g \cdot y(n\tau)$$

$$x((n+1)\tau) = 0 \quad (\text{car } (n+1)\tau \neq 0)$$

$$\Rightarrow y((n+1)\tau) = -g \cdot y(n\tau) = -g \cdot (-g)^n = (-g)^{n+1}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a bien :

$$h(k) = y(k) = (-g)^n \quad \text{si } k = n\tau, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et $h(k) = 0$ pour tout autre k .

La réponse impulsionnelle est donc une suite géométrique espacée tous les τ échantillons.

3.10.

D'après le cours de maths, puisque c'est une suite géométrique, la condition est que $|g| < 1$

3.11.

On cherche à déterminer les vecteurs a et b pour le filtre de l'équation (3). Pour cela il suffit de la réécrire sous la forme standard :

$$y(k) + g \cdot y(k - \tau) = x(k)$$

Ce qui nous donne immédiatement $a = [1, 0, \dots, 0, g]$ avec $\tau - 1$ zéros, et $b = [1]$.

3.12.

On trace ce filtre avec la fonction `filter` de matlab, ce qui donne :

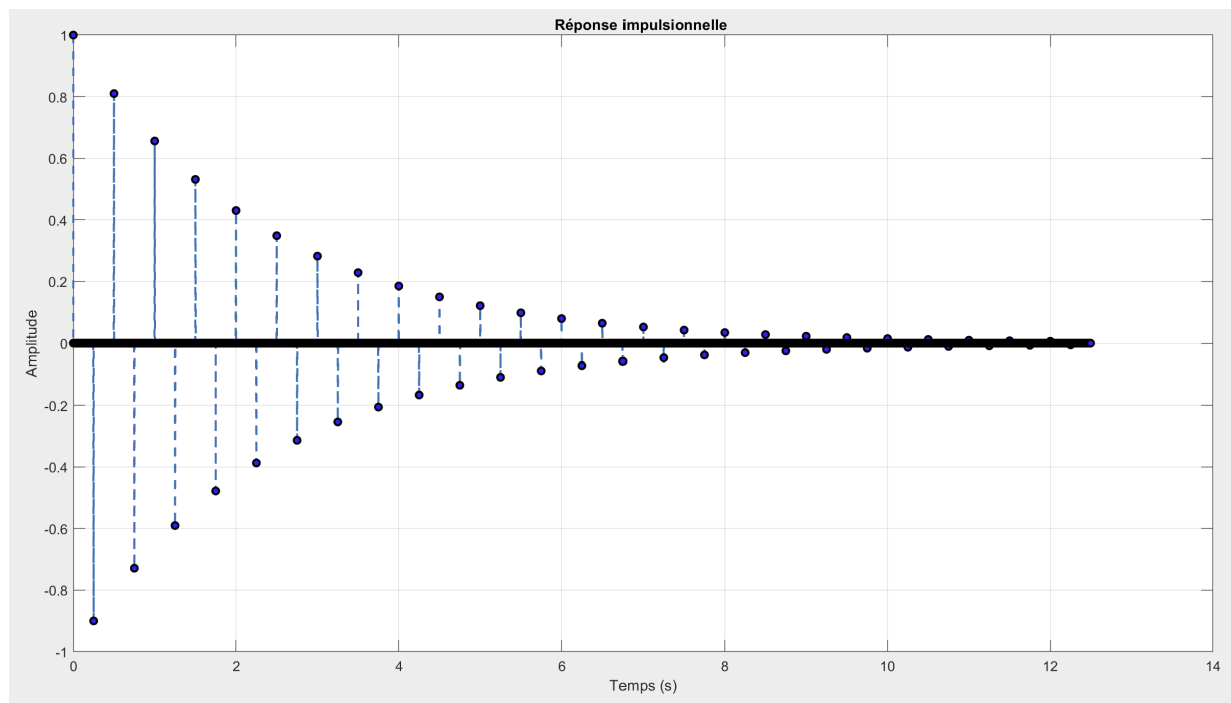


FIGURE 18 – $h(k)$

On a ici tracé pour 50τ . On remarque que les valeurs où h est non nulle sont contenues dans une enveloppe qui décroît exponentiellement, ce qui correspond à ce à qu'on on pouvait s'attendre avec une décroissance géométrique.

Puisque c'est peu lisible avec les valeurs nulles, voici la représentation de h aux points multiples de τ :

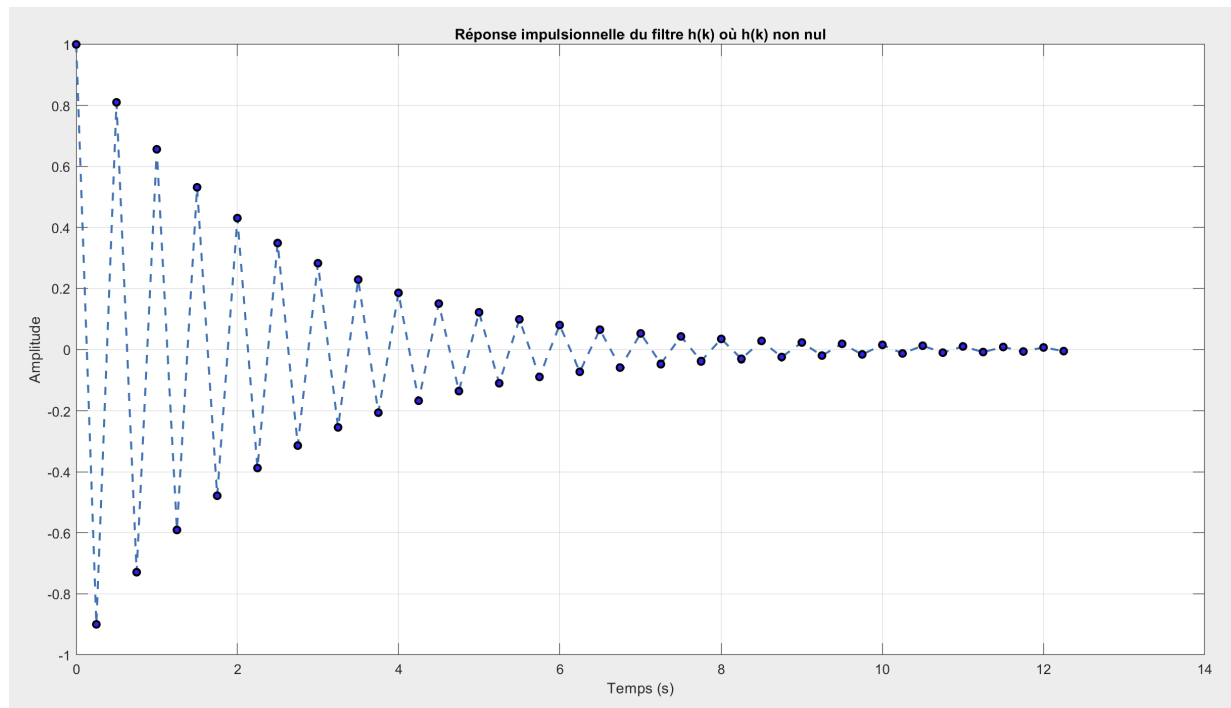


FIGURE 19 – $h(k)$ avec h non nulle

3.13.

On considère le système défini par l'équation de récurrence :

$$y(k) = x(k) - g \cdot y(k - \tau)$$

Nous allons en déterminer l'équation en fréquentiel. Prenons la transformée en z des deux membres :

$$Y(z) = X(z) - g \cdot z^{-\tau} Y(z) \Rightarrow Y(z)(1 + g z^{-\tau}) = X(z)$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + g z^{-\tau}}$$

En évaluant sur le cercle unité $z = e^{j2\pi\nu}$, on obtient la réponse fréquentielle :

$$\hat{h}(\nu) = \frac{1}{1 + g e^{-j2\pi\nu\tau}}$$

Module de la réponse fréquentielle :

$$|\hat{h}(\nu)| = \left| \frac{1}{1 + g e^{-j2\pi\nu\tau}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2g \cos(2\pi\nu\tau) + g^2}}$$

Phase de la réponse fréquentielle :

$$\arg(\hat{h}(\nu)) = -\arctan\left(\frac{g \sin(2\pi\nu\tau)}{1 + g \cos(2\pi\nu\tau)}\right)$$

3.14.

On trace la réponse impulsionnelle du filtre de deux façons, grâce aux fréquences théoriques déterminées précédemment et grâce à la transformée de Fourier discrète. Ceci nous donne, pour $g=0.6$ et $\tau=0.005$:

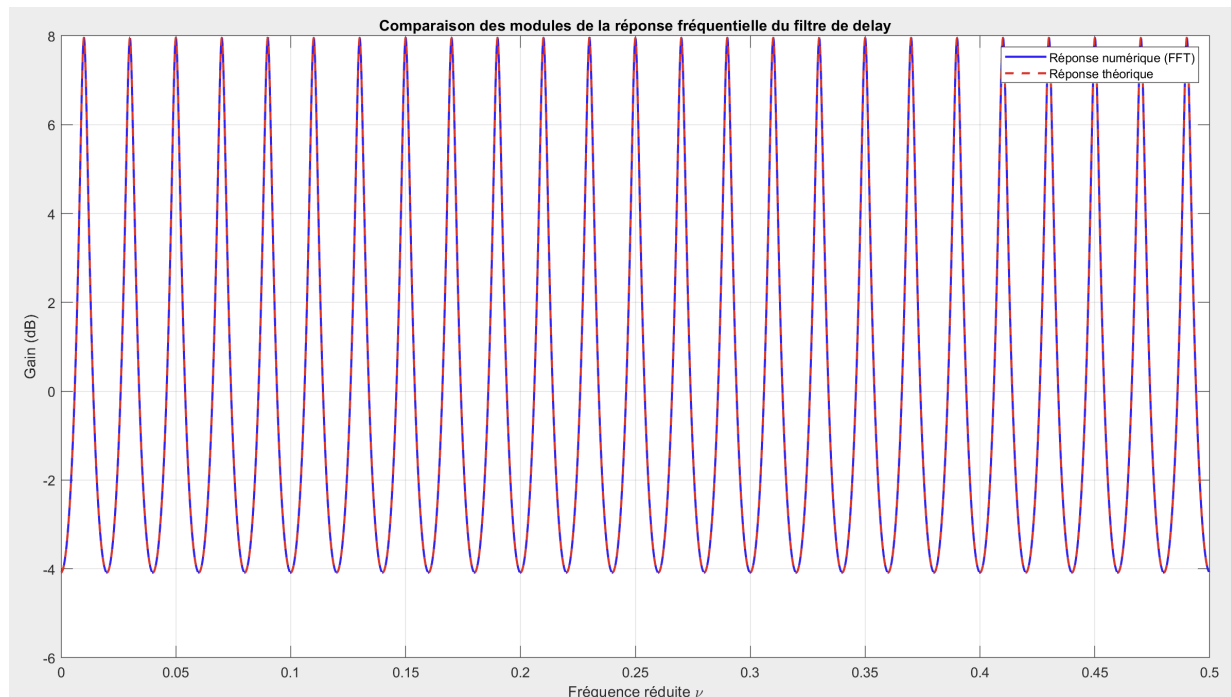


FIGURE 20 – Réponses théorique et numérique

On constate que les deux courbes se superposent presque parfaitement, et prennent la forme d'un peigne. Parmi les différences il y a par exemple un très léger offset entre les courbes. Ces irrégularités ont plusieurs causes, nous allons en présenter les deux plus influentes. Pour pouvoir achever le calcul on a dû tronquer la réponse impulsionnelle, 'jetant' une partie de l'énergie. C'est négligeable car on tronque très tard, mais garde un léger impact. De plus, en définissant les derniers échantillons à 0, on crée une discontinuité qui vient aussi parasiter les fréquences.

3.15.

Voici une fonction permettant d'implémenter ce délai dans matlab :

```
function y = effet_delay(x, tau_s, g, Fe)
    tau = round(tau_s * Fe);
    a = [1, zeros(1, tau-1), g];
    b = 1;
    y = filter(b, a, x);
end
```

3.16.

En lançant le script avec $\tau=0.25*Fe$ et $g=0.9$, on obtient comme le suggère l'énoncé un son très synthétique. En revanche, avec $\tau=0.005*Fe$ et $g=0.6$ (les paramètres utilisés à la question précédente), on obtient un son convaincant qui est beaucoup plus convaincant que sans retard.

3.17.

On programme désormais une fonction implémentant une moyenne glissante :

```
function y = effet_delay_filtre(x, tau_s, g, K, Fe)

    tau = round(tau_s * Fe);
    N = length(x);
    y = zeros(size(x));

    for k = 1:N
        somme = 0;
        for n = 0:K-1
            idx = k - tau - n;
            if idx > 0
                somme = somme + y(idx);
            end
        end

        y(k) = x(k) - (g / K) * somme;
    end
end
```

3.18.

Le son obtenu est peu naturel et présente des gros battements à chaque écho. Avec d'autres paramètres on obtient un joli son naturel ($\tau=0.05$, $g=0.6$, $K=20$)

3.19.

Voici le spectre alors obtenu :

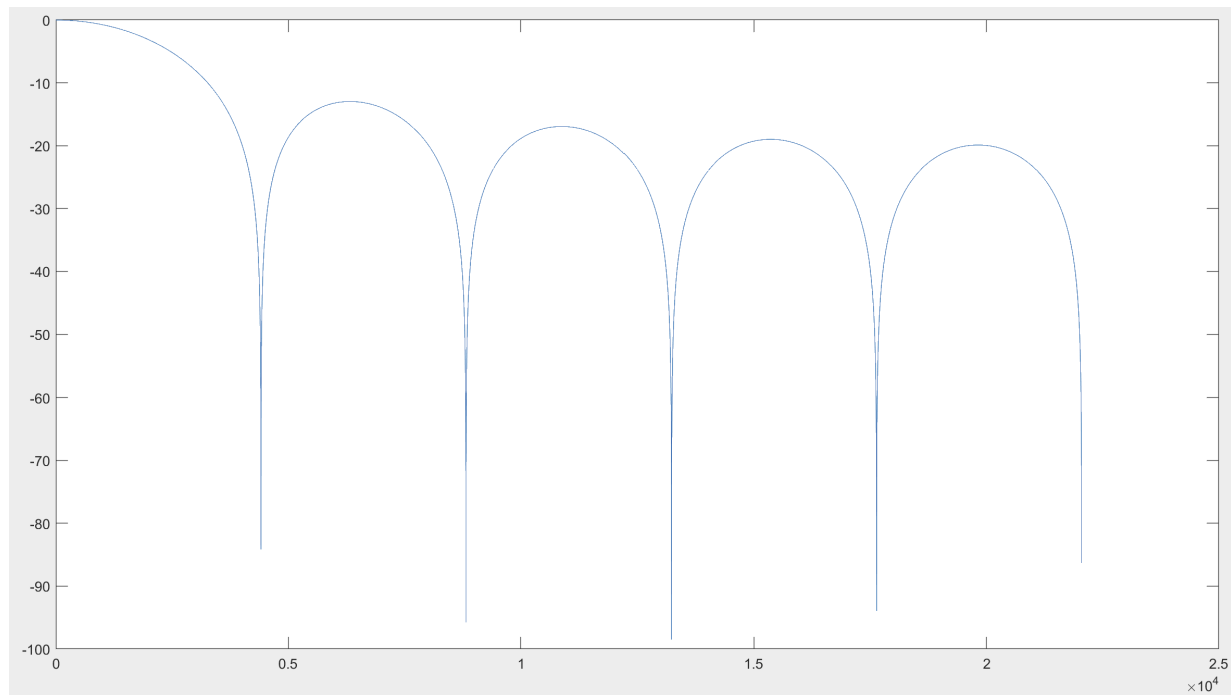


FIGURE 21 – Spectre de l'accord avec délai

On constate qu'il y a une pente descendante vers les fréquences hautes, ce qui traduit une atténuation des hautes fréquences comme attendu.

OUR WORLDWIDE PARTNERS UNIVERSITIES - DOUBLE DEGREE AGREEMENTS



3 CAMPUS



IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire – <http://www.imt-atlantique.fr/>

Campus de Brest

Technopôle Brest-Iroise
CS 83818
29238 Brest Cedex 3
France
T +33 (0)2 29 00 11 11
F +33 (0)2 29 00 10 00

Campus de Nantes

4, rue Alfred Kastler
CS 20722
44307 Nantes Cedex 3
France
T +33 (0)2 51 85 81 00
F +33 (0)2 99 12 70 08

Campus de Rennes

2, rue de la Châtaigneraie
CS 17607
35576 Cesson Sévigné Cedex
France
T +33 (0)2 99 12 70 00
F +33 (0)2 51 85 81 99



IMT Atlantique

Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom